Koordinat düzlemi : Birbirini dik olarak kesen, yönlendirilmiş iki doğrunun belirttiği düzlem.

Küçük Çember : Kürenin, küçük dairesine ait çember.

Küçük daire : Bir küre ile bu kürenin merkezinden geçmeyen bir düzlemin arakesiti.

Küre : Uzayda, sabit bir noktadan eşit uzaklıktaki noktalar kümesi.

Kürenin içi : Kürenin, merkezine olan uzaklığı yarıçaptan küçük olan noktalarla küre merkezinin birleşim kümesi.

– N –

Nicelik : Bir şeyin sayılabilen, ölçülebilen veya azalıp çoğalabilen hali.

– O –

Olasılık : Bir olayın olabilme şansını belirten sayı.

Oran : İki kümenin eleman sayıları veya iki ölçü arasındaki karşılaştırma.

Orantı : Her a, b, c, d birer gerçek sayı olmak üzere $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ eşitliği.

Ortak bölen : Birden fazla sayma sayısını kalansız olarak bölen sayı ya da sayılar.

Ortak bölenleri en büyüğü (obeb) : Birden fazla sayma sayısını, kalansız olarak bölebilen en büyük sayı.

– Ö –

Önerme : Doğru ya da yanlış, kesin bir hüküm belirten ifade.

– S –

Sıralı ikili : Verilen iki kümenin, önce birincisinden, sonra ikincisinden alınan elemanlarla oluşturulan ikililerden her biri.

Simge : Danışıklı bir anlamı olan resim, harf gibi işaret.

– P –

Permütasyon : Bir kümenin ya da küme parçalarının elemanlarının belli bir sıraya göre dizilişleri.

Sonsuz küme : Elemanları sayılamayan küme.

Sonlu küme : Elemanları sayılabilir küme.

– T –

Teğet : Çember ile kesişimi bir nokta olan doğru.

Teğet düzlemi : Küre ile kesişimi bir nokta olan düzlem.

Tek sayı : Çift olmayan doğal sayı.

Ters eleman : Bir işlem ile o işlemin etkisiz elemanını veren iki eleman, o işleme göre ters elemandır.

Örneğin : $-4 + 4 = 0$ ise, -4 ile 4, "+" işlemine göre ters elemanlardır.

– Ü –

Üçgen : Doğrusal olmayan üç noktayı birleştiren üç doğru parçasının oluşturduğu küme.

Üçgensel bölge : Üçgen ile iç bölgesinin birleşim kümesi.

– Y –

Yarı çap : Çemberin bir noktası ile merkezini birleştiren doğru parçası.

Yay : Çember üzerinde alınan iki nokta ile bu noktalar arasındaki çember parçası.

– Z –

Zarar : Alışveriş işleminin kaybettirdiği para.

MATEMATİK

LİSE I

Yazanlar

Muammer GÜRDAL
G. E. E. Matematik Öğretmeni

Faruk AYDAN
Fen Lisesi Emekli Matematik Öğretmeni

Ekrem METİN
G. E. E. Matematik Öğretmeni

BİRİNCİ BASILIŞ

M.E.B.
DEVLET KİTAPLARI

TÜRK TARİH KURUMU BASIMEVİ, ANKARA, 1978

MATEMATİK

LİSE I

Her hakkı saklıdır ve Milli Eğitim Bakanlığına aittir. Kitabın metni, sorun ve şekilleri kısmen de olsa hiç bir surette alınıp yayınlanamaz.

Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu'nun 23. 5. 1978 gün ve 197 sayılı kararı ile ders kitabı olarak kabul edilmiş, Yayımlar ve Basılı Eğitim Malzemeleri Genel Müdürlüğü'nün 7. 6. 1978 gün ve 5517 sayılı emri ile birinci defa 350.000 adet basılmıştır.

İÇİNDEKİLER

BİRİNCİ BÖLÜM

MANTIK

	Sayfa
1– 1. Matematik ve Mantık	1
1– 2. Terim – Tanımlanmamış Terim	1
1– 3. Önermeler	2
1– 4. Eşdeğer (Denk) Önermeler	5
1– 5. Bir Önermenin Olumsuzu (Değili)	7
1– 6. Açık Önermeler	9
1– 7. Bileşik Önermeler	11
1– 8. Totoloji ve Çelişki	18
1– 9. Mantık Kurallarının Elektrik Devrelerine Uygulanışı	21
1–10. Koşullu Önerme ve Gerektirme	26
1–11. İki Yönlü Koşullu Önerme ve Çift Gerektirme	31
1–12. Aksiyom – Teorem – İspat	33
1–13. Matematikte Kullanılan Niceleyiciler	36

İKİNCİ BÖLÜM

KÜMELER

2– 1. Küme Kavramı	42
2– 2. Kümelerin Venn Şeması ile Gösterimi	46
2– 3. Alt Küme	49
2– 4. Kümelerin Birleşimi	53
2– 5. Kümelerin Kesişimi	58
2– 6. Tümleme	63
2– 7. İki Küme Farkı	65

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

BAĞINTI - FONKSİYON - İŞLEM

		Sayfa
3- 1.	Kartezyen Çarpım	70
3- 2.	Analitik Düzlem ve Bir Noktanın Koordinatı	74
3- 3.	Bağıntı ve Özelikleri	77
3- 4.	Denklik ve Sıralama Bağıntıları	85
3- 5.	Fonksiyon	91
3- 6.	Fonksiyon Türleri	96
3- 7.	Eşit Fonksiyonlar	98
3- 8.	Ters Fonksiyon	99
3- 9.	Bileşke Fonksiyon	101
3-10.	İşlem	105
3-11.	İşlemin Özelikleri	107
3-12.	Birim (Etkisiz) Eleman - Ters Eleman	109

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

SAYILAR - TAMSAYILAR - MODÜLER ARİTMETİK MATEMATİK SİSTEMLER

4-1.	Doğal Sayılar	115
4-2.	Tamsayılar	130
4-3.	Modüler Aritmetik	149
4-4.	Matematik Sistemler	154
4-5.	Grup	154
4-6.	Halka	156
4-7.	Cisim	159

BEŞİNCİ BÖLÜM

RASYONEL SAYILAR VE REEL SAYILAR

5-1.	Rasyonel Sayılar	164
5-2.	Reel (Gerçek) Sayılar	184
5-3.	Karekök ve Mutlak Değer	189
5-4.	Reel Sayıların Rasyonel Kuvveti	196
5-5.	Oran ve Orantı	199

ALTINCI BÖLÜM

GEOMETRİK KAVRAMLAR

		Sayfa
6- 1.	Doğru, Doğru parçası, Işın	207
6- 2.	Arada Olma	211
6- 3.	Doğrular, Düzlemler	217
6- 4.	Konveks Kümeler	221
6- 5.	Açılar, Üçgenler	224
6- 6.	Açıların Ölçülmesi	229
6- 7.	Diklik, Dik Açılar, Açıların Eşliği	233
6- 8.	Üçgenlerin Eşliği	237
6- 9.	Paralel Doğrular	251
6-10.	Üçgenlerin Kenarları ile Açıları Arasındaki Eşitsizlikler	259
6-11.	Çokgenler	264
6-12.	Basit Üçgen Çizimleri	275

YEDİNCİ BÖLÜM

7-1.	Polinomlar	284
7-2.	Çarpanlara Ayırma	299
7-3.	Rasyonel İfadeler	309
7-4.	Bir Bilinmiyenli denklemler	314
7-5.	Rasyonel denklemler	318

SEKİZİNCİ BÖLÜM

ANALİTİK GEOMETRİ

8-1.	Koordinat Sistemi	322
8-2.	İki Nokta Arasındaki Uzaklık	327
8-3.	Doğrunun Denklemi	329
8-4.	Lineer Denklemler	339
8-5.	Grafikle Çözüm	343

SİMGELER VE ANLAMLARI

p'	p önermesinin değili
$\vee$	Veya
$\wedge$	Ve
$\Rightarrow$	Gerektirme
$\Leftrightarrow$	Çift gerektirme
$\exists$	Bazı, en az bir
$\forall$	Her, tüm
$\{\}, \emptyset$	Boş, küme
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
s(A)	A kümesinin eleman sayısı
$\cup$	Birleşim
$\cap$	Kesişim
A'	A kümesinin tümleyeni
gof	f ile g nin bileşke fonksiyonu
$a \equiv b \pmod m$	a sayısı modülo m ye göre b sayısına denktir
$\bar{x}$	x in denklik sınıfı
N^+	Pozitif tamsayılar (sayma sayıları) kümesi
N	Doğal sayılar kümesi.
Z	Tamsayılar kümesi.
Q	Rasyonel sayılar kümesi.
R	Reel sayılar kümesi.
$\|x\|$	x in mutlak değeri.
OKEK	Ortak katların en küçüğü
OBEB	Ortak bölenlerin en büyüğü
$m\hat{A}$	A açısının ölçüsü
$\hat{A} \cong \hat{B}$	A açısı B açısına eştir.
$\leftrightarrow$	Bire-bir eşleme
[AB]	AB doğru parçası
|AB|	AB doğru parçasının uzunluğu
[AB	AB ışını
$\overset{\frown}{ABC} \cong \overset{\frown}{DEF}$	ABC üçgeni DEF üçgenine eştir.
$\overleftrightarrow{AB}$	AB doğrusu

BİRİNCİ BÖLÜM

MANTIK

1–1. Matematik ve Mantık

İçindeki bulunduğumuz yüzyılda insan yaşamında büyük gelişmemeler olmaktadır. Her biri mantıklı düşünmenin birer ürünü olan yapıtlar çevremizi sarmakta, onlarla ilişkilerimiz gün geçtikçe artmaktadır. Örneğin, mantıksal kurallara dayalı olarak yapılan çeşitli makinalar (bilgi sayarlar) bugün insan yaşamının vazgeçilmez araçları olmaktadır. Bu araçlar sayesinde Ay'a ulaşan insan, yine bu araçlar sayesinde uzayın sırlarını çözmeye uğraşmaktadır. Zamanımızda her bilim dalı ile ilgili bilgiler hızla çoğalmakta, bunların sistemli bir biçimde öğrenilmesi ve öğretilmesi zorunlu olmaktadır.

Matematik bize, mantıklı (doğru ve sistemli) düşünebilme alışkanlığı kazandırmak ister. Bugünkü durumu ile büyük boyutlar kazanmış olan matematiğin temeli mantığa dayanmaktadır. Mantık kuralları uygulanmadan matematik öğrenilemez ve öğretilemez. Mantık matematiğin dilini kurar, ona anlam ve biçim kazandırır.

1–2. Terim – Tanımlanmamış Terim

Bir bilim dalı içerisinde özel anlamı olan sözcükler vardır. Bunlara, o bilim dalının bir **terimi** denir. Örneğin, "küp" sözcüğünün matematikteki anlamı, konuşma dilindeki anlamından başkadır. Sözgelimi, "doğru" sözcüğü için de aynı şeyi söyleyebiliriz. Önerme, küme, nokta, açı gibi birçok matematiksel terimi yeri geldikçe öğreneceksiniz. Ancak, bu terimlerin bazılarını tanımlanmamış olarak alacağız. Bunun nedenini anlamak için şöyle bir örnek verelim :

Konuşmaya yeni başlayan bir çocuk çevresinde gördüğü varlıkları tanımak ve yeni duyduğu sözcüklerin anlamlarını öğrenmek için büyüklerine bir çok sorular yöneltir. Sözgelimi, bir okulu göstererek,

— Bu nedir?

diye sorabilir. Bu soruyu,

— O bir okuldur,

diye yanıtladığımızı varsayalım. Buna karşı çocuk bize,

— Okul nedir?

diye ikinci bir soru yöneltebilir. Bu soruyu da,

— Öğretmen ve öğrencilerin sınıflarda ders yaptıkları binadır. diye yanıtlayalım. Yanıtımızda kullandığımız sözcükler, çocuğun yeni sorularına neden olur. Sözgelimi, çocuk bize,

— Öğretmen nedir?
— Öğrenci nedir?
— Sınıf nedir?
— Bina nedir?

diye sorabilir. Bu soruların da yanıtlarını verdiğimizi varsayalım. Şimdi, çocuğun yeni soruları bizi beklemektedir. Eğer, onları da yanıtlasak daha başka sorularla karşılaşmamız kaçınılmaz olur. Çünkü, her yanıtımız çocuğun yeni sorularına neden olmaktadır. Bu soru zincirini bir yerde durdurabilmek için çocuğun bazı sorularını yanıtsız bırakmak zorunda kalırız. Örneğin, çocuk şimdi de,

— Kapı nedir?

diye sormuşsa, artık kapının tanımını yapmaktan kaçınır ve "kapı kapıdır" diyerek "kapı" sözcüğünün anlamını sezgiye bırakmış oluruz Bunun gibi, matematiksel terimlerin tümünü tanımlamaya kalkmak olanaksızdır. Eğer, her terimi tanımlamak istesek bu işin sonucunu alamayacağımız ve bu nedenle matematikte hiç bir ilerleme yapamayacağımız besbellidir. Öyleyse, bazı terimleri tanımsız olarak almak zorundayız. Sözgelimi, birinci bölümle ilgili olarak "doğru", "yanlış" ve "değişken" terimlerini tanımsız olarak alacağız. Yeri geldikçe, tanımsız olarak alınan başka terimleri de tanıyacaksınız. Örneğin, altıncı bölümde geometriye başlarken, "nokta", "doğru" ve "düzlem" terimlerinin de tanımsız olarak alındığını göreceksiniz.

1–3. Önermeler

Konuşurken kullandığımız tümcelerin belirttiği hükümlerin bazılarını "**doğru**" bazılarını da" "**yanlış** olarak nitelendiririz. Sözgelimi, "Ankara, Türkiye'nin başşehridir" tümcesinin belirttiği hükme **doğru**, "Bir hafta sekiz gündür" tümcesinin belirttiği hükme de "**yanlış**" deriz. (**Doğru** ve **yanlış** terimlerinin birer tanımsız terim olarak alındığını unutmayınız.) Hem doğru hem de yanlış hüküm bildiren bir tümcenin olmadığı besbellidir. Ancak bazı tümceler, doğru ya da yanlış terimlerinden hiçbirisi ile nitelendirilemez. Örneğin, "Lütfen oturunuz", "Adınız nedir?" gibi tümcelere ne doğru ne de yanlış diyebiliriz, değil mi?

1–1. Tanım

Bir tümcenin belirttiği hüküm kesinlikle doğru ya da yanlış ise bu tümceye bir **önerme** denir.

1–1. Örnek

Aşağıdaki tümcelerin önerme olup olmadığını belirtelim.

a) Atatürk, 19 Mayıs 1919 günü Samsun'a çıktı.
b) 4 bir çift sayıdır.
c) Bir yılda beş mevsim vardır.
d) Güle, güle!
e) Ders çalışalım.
f) BÜYÜK HARFLERLE YAZILAN HER TÜMCE YANLIŞTIR.

Bunlardan, (a) ve (b) deki tümcelerin doğru, (c) deki tümcenin ise yanlış olduğunu kolayca söyleyebilirsiniz. Öyleyse, bunların her biri birer önermedir. (d) ve (e) deki tümcelerin doğru ya da yanlış olması düşünülemez, değil mi? O halde, bunlar birer önerme değildir. Şimdi, (f) deki tümceye bakalım. Önce bu tümcenin doğru olduğunu varsayalım. O zaman, bu tümcenin kendisi de büyük harfle yazıldığı için yanlış olması gerekir. Öyleyse bu tümce doğru olamaz. Şimdi de, bu tümcenin yanlış olduğunu varsayalım. Bu defa, büyük harfle yazılan her tümce doğru olmak zorunda kalacağından bu tümce de doğru olmalıdır. Öyleyse, bu tümce yanlış olamaz. Kısacası; (f) deki tümceye ne doğru diyebiliriz, ne de yanlış. Bu nedenle, bu tümce bir önerme değildir.

Siz de, önerme olan ya da olmayan bazı tümceler söyleyiniz.

Kolaylık olsun diye önermeleri p, q, r, ... gibi harflerle adlandıracağız. Sözgelimi, "2 en küçük asal sayıdır," önermesine kısaca "p" önermesi diyebiliriz. Bu p önermesinin doğru olduğuna dikkat ediniz. Bunun gibi, "sıfır bir tek sayıdır," önermesini de "q" ile gösterelim. q önermesinin yanlış olduğunu da kolayca söyleyebilirsiniz.

Herhangi bir p önermesi için iki hal vardır. Bunları, aşağıdaki tablodan izleyiniz.

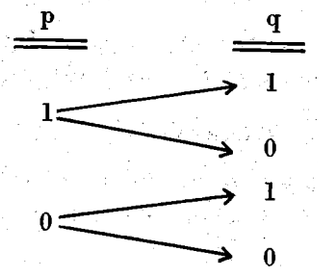
p	
Doğru	(D)
Yanlış	(Y)

Bu tabloyu daha kullanışlı biçime getirebilmek için, "doğru" sözcüğü yerine "1" simgesini, "yanlış" sözcüğü yerine de "0" simgesini kullanalım. Buna göre, yukardaki tablo aşağıdaki biçimde olur.

P
1
0

Bir önermenin doğru ya da yanlış olduğunu bildiren "1" ve "0" simgelerinin her birine bu önermenin **doğruluk değeri** diyeceğiz.

Ali ile Ayşe'nin birer önerme söylediklerini varsayalım. Bu iki önermenin doğruluk değerlerinin karşılıklı olarak kaç değişik biçimden birisi olabileceğini araştıralım. p ve q herhangi iki önerme olsun. p nin doğruluk değerlerinin herbiri için q nun iki tane doğruluk değerinden birini alacağı besbellidir. Bunu, aşağıdaki gibi belirtebiliriz.



Burada görüldüğü gibi herhangi iki önermenin doğruluk değerleri karşılıklı olarak dört değişik biçimde sıralanabilmektedir. Bu dört durumu aşağıdaki tabloda daha kolay olarak izleyebilirsiniz.

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

Şimdi, Ali ile Ayşe'nin söylediği önermelerin doğruluk değerlerinin sırasının bu dört durumdan birisi olduğunu kolayca söyleyebilirsiniz.

Üç tane önermenin doğruluk değerlerinin kaç değişik biçimde sıralanabileceğini araştırarak aşağıdaki tabloyu kolayca elde edebilirsiniz.

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Siz de, dört tane önermenin doğruluk değerlerinin kaç değişik biçimde sıralanabileceğini gösteren bir tablo yapınız.

1–4. Eşdeğer (Denk) Önermeler

Doğruluk değeri aynı olan iki önerme söyleyiniz. Örneğin,

r = (Balıkesir bir İç Anadolu şehridir).

önermesi ile,

s = (Doğum günüm Şubatın otuzudur.)

önermesini alalım. Bu iki önermenin doğruluk değeri "0" dır, değil mi? Ayrıca,

t = (3^2=9) ile m=(2+13=15)

önermelerinin doğruluk değerinin de "1" olduğunu kolayca söyleyebilirsiniz. Bunlarla ilgili olarak aşağıdaki tanımı veriyoruz.

1–2. Tanım

Doğruluk değerleri aynı olan iki önermeye, **eşdeğer (denk)** iki önerme denir. p ile q eşdeğer iki önerme ise bunu p≡q biçiminde yazar ve "p eşdeğerdir q" diye okuruz.

Bu tanıma göre, yukarıdaki, r, s, t ve m önermeleri için

r≡s ve t≡m

olduğunu yazabiliriz. Bu önermelerden örneğin r ile t nin eşdeğer olmadığını da $r \not\equiv t$ biçiminde yazarak belirtiriz. Siz de, ikişer ikişer önermeler söyleyerek onların eşdeğer olup olmadığını belirtiniz.

1–1. Alıştırmalar

1) Aşağıdaki tümcelerin önerme olup olmadığını söyleyiniz. Önerme olanların doğruluk değerini belirtiniz.

a) Cumartesi günü okul tatildir.

b) Türkiye'nin en kalabalık şehri İzmir'dir.

c) Neşeli olun.

d) Ortaokula öğrenci olarak girmek için liseyi bitirmemiz gerekir.

e) Hoş geldiniz.

f) İnsanoğlu ilk kez 1968 yılında Ay'a ayak bastı.

g) Çemberin alanı, yarıçapının karesi π sayısı ile çarpılarak bulunur.

h) Bu üçgen çok şakacıdır.

2) Doğruluk değeri "1" olan üç tane önerme söyleyiniz.

3) Doğruluk değeri "0" olan üç tane önerme söyleyiniz.

4) Bir önermeye hem doğru hem de yanlış diyebilir misiniz? Cevabınızın nedenini açıklayınız.

5) Önerme olmayan dört tane tümce söyleyiniz.

6) Sınıfımızdaki bir arkadaşımızın "bizim sınıftaki öğrencilerin her biri yalancıdır", dediğini varsayalım. Bu tümce bir önerme midir? Nedenini açıklayınız.

7) Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri uygun biçimde doldurunuz.

p	q	r
0	0	1
1	1	
0	1	
0		0
1		0
	1	
	0	1

8) p=(8<5), q= (Antalya Karadeniz kıyısındadır.)

r=(0^2=0) ve t=(1 kg = 100 gr) önermeleri veriliyor. Aşağıdaki önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu söyleyiniz.

a) $p \equiv q$ b) $p \equiv r$ c) $p \equiv t$

d) $r \equiv t$ e) $t \equiv p$ f) $t \equiv q$

1–5. Bir Önermenin Olumsuzu (Değili)

"6 bir çift sayıdır" önermesi ile "6 bir çift sayı değildir" önermesine dikkat edelim. Bunlardan birinci önermenin sonuna "değil" sözcüğü eklenerek yapılan ikinci önermeye, birinci önermenin değili (olumsuzu) diyeceğiz. Bunun gibi, "dün sinemaya gittim" önermesinin değili (olumsuzu), "dün sinemaya gitmedim" önermesidir. "Dün sinemaya gitmedim" önermesinin de değili (olumsuzu) yapıldığında, "dün sinemaya gittim" önermesinin elde edileceğini kolayca söyleyebilirsiniz. Bir önermenin değili ile ilgili olarak aşağıdaki tanımı veriyoruz.

1–3. Tanım

Bir p önermesinin olumsuzu (değili) p′, p veya $\sim$ p simgelerinden herhangi birisiyle gösterilir. p önermesi doğru ise p′ önermesi yanlış, p önermesi yanlış ise p′ önermesi doğrudur.

Bu tanıma göre, herhangi bir p önermesi verildiğinde p ile p′ nün karşılıklı olarak alabilecekleri değerleri gösteren aşağıdaki tabloyu yapabiliriz.

p	p′
1	0
0	1

Şimdi, bir önermenin olumsuzu (değili) ile ilgili örnekler görelim.

1–2. Örnek

Nilgün matematik sınavını başaramadı" önermesinin olumsuzunu (değilini) yapalım.

Bu önermenin olumsuzu, "Nilgün matematik sınavını başardı" önermesidir.

1–3. Örnek

a) A takımı B takımını yendi.

b) $6<8$

önermeleri veriliyor. Bu önermelerin olumsuzunu (değilini) yapalım :

a) (A takımı B takımını yendi)′ ≡ A takımı B takımını yenemedi.

≡ A takımı B takımına yenildi veya A ile B takımları berabere kaldı.

b) $(6<8)' \equiv (6>8 \text{ veya } 6=8) \equiv (6 \geqslant 8)$ dir.

Siz de, bir önerme söyleyiniz ve bu önermenin olumsuzunu yapınız. Yeni bulduğunuz önermenin de olumsuzunu alınız. İlk söylediğiniz önermeyi elde ettiniz değil mi? Bu gerçeği, $(p')' \equiv p$ biçiminde ifade edebiliriz. Aşağıdaki tabloyu inceleyiniz.

p	p′	(p′)′
1	0	1
0	1	0

$p \equiv (p')'$

1–2. Alıştırmalar

1) Aşağıdaki önermelerin her birinin olumsuzu (değili) olan önermeyi söyleyiniz.

a) Koyun dört ayaklı bir hayvandır.

b) Güney kutbunda buz yoktur.

c) Türkçede sekiz tane sesli harf vardır.

d) Metre, bir ağırlık ölçüsü birimidir.

e) Ay'da hayat yoktur.

2) Birinci alıştırmaya cevap olarak bulduğunuz önermelerin her birinin olumsuzunu yapınız.

3) Aşağıda verilen önermelerin değilini (olumsuzunu) yazınız.

a) $3=4$ b) 7 bir asal sayıdır.

c) $2<4$ d) $\pi \leqslant 3$ e) $(-2)^2>0$

1–6. Açık Önermeler

"x dört ayaklı bir hayvandır" ifadesinde x yerine "kedi" sözcüğünü yazarsak, "kedi dört ayaklı bir hayvandır" önermesini elde ederiz. Bu önermenin doğru olduğunu biliyorsunuz. Şimdi de, x yerine "kuş" sözcüğünü yazalım. Elde ettiğimiz, "kuş dört ayaklı bir hayvandır" önermesi yanlıştır. Siz de, x yerine çeşitli hayvan isimleri yazarak doğru ya da yanlış önermeler elde ediniz.

Şimdi de, x bir tamsayıyı göstermek üzere, $x<5$ ifadesini yazalım. Burada, x değişkeni yerine 3 yazarsak $3<5$ önermesini, 7 yazarsak $7<5$ önermesini elde ederiz. Bu önermelerden birincisinin doğru, ikincisinin yanlış olduğuna dikkat ediniz. Siz de, x yerine bazı tamsayılar yazarak elde ettiğiniz önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu söyleyiniz.

1–4. Tanım

İçerisinde en az bir değişken bulunan ve bu değişkenlere verilebilen değerlerle doğru ya da yanlışlığı kesinlikle saptanabilen ifadelere **açık önerme** denir.

Bu tanıma göre örneğin x ve y birer tamsayı olmak üzere,

$$x^2 \geqslant 0, \quad x^2=x, \quad 2x+6=0, \quad x+2y=0$$

ifadeleri birer açık önermedir. (Bunlardan ilk üç tanesinin bir değişkenli dördüncünün ise iki değişkenli olduğuna dikkat ediniz.) Bu açık önermelerden, $x^2 \geqslant 0$ açık önermesinde x yerine hangi tamsayıyı yazarsak yazalım daima doğru önerme elde ederiz değil mi? $x^2=x$ açık önermesi ise x in yalnız 0 ve 1 değerleri için doğru, öteki değerleri için yanlıştır. $2x+6=0$ açık önermesinin de yalnız $x=-3$ için doğru önerme, -3 den başka her tamsayı için yanlış önerme olduğunu kolayca söyleyebilirsiniz. İki değişkenli açık önerme olan, $x+2y=0$ açık önermesinde de örneğin, "$x=0$, $y=0$" ve "$x=4$, $y=-2$" gibi değerler verdiğimizde birer doğru önerme elde ederiz. Sözgelimi, $x=1$, $y=-1$ yazarsak yanlış önerme elde edilir. Siz de, x ve y yerine bazı tamsayılar yazarak $x+2y=0$ açık önermesinden doğru ya da yanlış önermeler elde ediniz.

1–4. Örnek

x bir tamsayıyı göstermek üzere, $2x \neq 6$ açık önermesini doğru yapan üç tane tamsayı söyleyiniz. Bu açık önermeyi yanlış yapan bir tamsayı söyleyebilir misiniz?

Çözüm : x değişkenine bağlı olan bu açık önermeyi p (x) ile gösterelim. Böylece, $p(x)=(2x\neq 6)$ dır. Burada x yerine 5 yazarsak, $p(5)=(2.5\neq 6)$ dır. Öyleyse, p(5) bir doğru önermedir. Bunun gibi örneğin, x yerine sıra ile 1 ve 2 yazarak $p(1)=(2.1\neq 6)$ ve $p(2)=(2.2\neq 6)$ elde edilir. Öyleyse, p(1) ve p(2) de birer doğru önermedir. p(3) için ne diyebilir siniz? $p(3)=(3.2\neq 6)$ olduğuna dikkat ediniz. Öyleyse, p(3) bir yanlış önermedir. Bu açık önermeyi yanlış yapan 3 den başka bir tamsayı söyleyebilir misiniz?

1–5. Örnek

x ve y birer tamsayı olmak üzere, $x+2y\leqslant 8$ açık önermesi veriliyor. Bu açık önerme p(x , y) biçiminde gösterildiğine göre, p(1 , 3), p(2 , 3), p(—1 , 2) ve p(5 , 4) önermelerinin doğru ya da yanlış olduğunu söyleyiniz.

Çözüm : $p(1 , 3)=(1+2.3\leqslant 8)$ yani, $p(1 , 3)=(7\leqslant 8)$ olduğundan, p(1 , 3) bir doğru önermedir. Bunun gibi, $p(2 , 3)=(8\leqslant 8)$ ve $p(-1 , 2)=(3\leqslant 8)$ olduğundan p(2 , 3) ve p(—1 , 2) de birer doğru önermedir. $p(5 , 4)=(13\leqslant 8)$ dir. Öyleyse, p(5 , 4) bir yanlış önermedir.

1–3. Alıştırmalar

1) Aşağıda verilen açık önermelerde x değişkeni bir kuşu göstermektedir. x yerine uygun kuş isimleri yazarak iki tane doğru önerme ve iki tane de yanlış önerme elde ediniz.

a) x bir göçmen kuştur.

b) x bir yırtıcı kuştur.

c) x uçamayan bir kuştur.

2) Aşağıda verilen açık önermelerde x değişkeni bir tamsayıyı göstermektedir. x yerine uygun tamsayılar yazarak iki tane doğru ve iki tane de yanlış önerme elde ediniz.

a) x bir asal sayıdır. b) $x^2>x$

c) $x^2-9>0$ d) $-x^2+x<-3$

3) x değişkeni tamsayı olmak üzere, $p(x)=(x^2-x\leqslant 9)$ açık önermesi veriliyor. Buna göre, p(—3), p(0), p(1) ve p(5) önermelerinin doğru ya da yanlış olduğunu söyleyiniz.

4) x ve y birer tamsayı olmak üzere, $p(x , y)=(x-8<2y)$ açık önermesi veriliyor. Buna göre, p(1 , —3), p(2 , 0), p(—1 , —5), p(12, 1) ve p(0 , —4) önermelerinin doğru ya da yanlış olduğunu söyleyiniz.

5) $p(x)=(x^2+x-30\leqslant 0)$ açık önermesi veriliyor. Aşağıdaki tabloyu inceleyiniz. Burada, $p(-1)=((-1)^2+(-1)-30<0)$ olduğundan, p(—1) önermesi doğrudur. Bu nedenle, —1 in karşısındaki p(x) in altına doğru anlamına gelen "1" yazılmıştır. Bunun gibi, p(7) yanlış olduğundan onun karşısına da yanlış anlamına gelen "0" yazılmıştır. Buna göre, tabloda boş olan yerleri uygun biçimde doldurunuz.

x	p(x)
—1	1
0	
7	0
—7	
3	
5	

1–7. Bileşik Önermeler

"Dün kar yağdı veya yağmur yağdı" tümcesi bir önerme midir? İki önerme arasında "veya" sözcüğü söylenerek oluşturulan tümceye "doğru" ya da "yanlış" diyebilir misiniz? Sezgimizi kullanarak bu soruyu şöyle cevaplayabiliriz.

Dün hem kar hem de yağmur yağmış ise bu tümce doğrudur. Eğer dün kar yağıp yağmur yağmadıysa ya da yağmur yağıp kar yağmadıysa bu tümce yine doğrudur, deriz. Ancak, kar ile yağmurdan hiç biri yağmadıysa bu tümceyi yanlış kabul ederiz. Gerçekten, bu tümce bir önermedir. Bunun gibi, "lokantaya gittim ve yemek yedim", "dün cuma ise bugün cumartesidir", "bir üçgenin eşkenar olması için gerek ve yeter koşul onun açılarının eş olmasıdır" tümcelerinin her biri de birer önermedir. Ancak, bu tür önermelere bileşik önerme diyeceğiz.

1–5. Tanım

En az iki önermenin, "veya", "ve", ' ise", "gerek ve yeter koşul" gibi birer önerme işlemi olan bağlaçlarla bağlanması ile oluşturulan yeni önermeye **bileşik önerme** denir.

Bileşik önermeleri, elde edildikleri bağlaçların türüne göre sıra ile ele alacağız. Önce, 'veya" ile elde edilen bileşik önermeleri ve onların özeliklerini inceleyelim.

1–6. Tanım

p ile q önermelerinden en az biri doğru ise "p veya q" bileşik önermesi doğrudur. p ile q nun ikisi de yanlış ise "p veya q" bileşik önermesi yanlıştır.

Bu tanıma göre, aşağıdaki bileşik önermelerin doğru ya da yanlış olduklarını söyleyelim.

"$3<5$ veya Boğaz köprüsü trafiğe açıldı." ..... (Doğru)

"$(-2)^2=4$ veya $6=7$ dir." ..... (Doğru)

"$2>5$ veya 8 asal değildir." ..... (Doğru)

"3 çift sayıdır veya Uludağ Konya'dadır." ..... (Yanlış)

Kolaylık için, "veya" sözcüğü yerine "$\vee$" simgesini kullanacağız. Buna göre, $p \vee q$ bileşik önermesinin doğruluk değerlerini gösteren tabloyu yapalım. (Bu tabloya, "$p \vee q$" nun doğruluk tablosu da diyeceğiz.)

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Bu doğruluk tablosunu aşağıdaki biçimde de yapabiliriz. Burada, p nin doğruluk değerlerinin düşey, q nun doğruluk değerlerinin de yatay olarak yazıldığına dikkat ediniz.

		q	
	$\vee$	0	1
p	0	0	1
	1	1	1

Siz de, çeşitli önerme çiftleri söyleyiniz. Bunlardan birisine p ötekine q diyerek $p \vee q$ bileşik önermesini ve onun doğruluk değerini söyleyiniz.

Şimdi de, "ve" ile yapılan bileşik önermenin doğruluk değerini belirten tanımı verelim.

1–7. Tanım

p ile q önermelerinin ikisi de doğru ise "p ve q" bileşik önermesi doğrudur, öteki durumlarda yanlıştır.

Bu tanıma göre, aşağıdaki bileşik önermelerin doğru ya da yanlış olduklarını söyleyelim.

"$1^{23}=1$ ve 13 asal sayıdır." ..... (Doğru)

"Edirne Trakyadadır ve $5^2=10$ dur." ..... (Yanlış)

"Roma Fransa'dadır ve $2^8>8^2$ dir." ..... (Yanlış)

"$2m=20$ cm ve $\sqrt{10}=5$ dir." ..... (Yanlış)

Kolaylık için, "ve" sözcüğü yerine de "$\wedge$" simgesini kullanacağız. Aşağıdaki, $p \wedge q$ bileşik önermesinin doğruluk değerlerini gösteren tabloları inceleyiniz.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

		q	
	$\wedge$	0	1
p	0	0	0
	1	0	1

Siz de, $p \wedge q$ biçiminde bileşik önermeler söyleyiniz ve her birinin doğruluk değerini yukardaki doğruluk tablosunu kullanarak bulunuz.

1–4. Alıştırmalar

1) Aşağıdaki bileşik önermelerin doğru veya yanlış olduğunu söyleyiniz.

a) $5-2=4$ veya $1=\frac{3}{3}$

b) $10^2=20$ veya $3>4$

c) $(-4)^2=17$ ve $4=2^2$

d) Şimdi 20. yüzyıldayız ve $\sqrt{25}=5$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ veya $(-2)^3=8$

f) $0<1$ ve $(-1)^4=-1$

2) Aşağıdaki tablolarda boş bırakılan yerleri uygun biçimde doldurunuz.

p	q	$p \vee q$
0		1
	0	0
1	1	
	0	1

p	q	$p \wedge q$
1		1
	1	
	0	
1		

3) İki açık önerme arasına "veya" yazarak oluşturulan,

$$x<7 \quad \text{veya} \quad x^2<5$$

ifadesinde x yerine öyle uygun tamsayılar yazınız ki,

a) Elde edilen bileşik önerme doğru olsun.

b) Elde edilen bileşik önerme yanlış olsun.

4) İki açık önerme arasına "ve" yazarak oluşturulan,

$$3x \geqslant 9 \quad \text{ve} \quad x+2<7$$

ifadesinde x yerine öyle uygun tamsayılar yazınız ki,

a) Elde edilen bileşik önerme doğru olsun.

b) Elde edilen bileşik önerme yanlış olsun.

5) Aşağıda (a) da verilen ifadenin nasıl hesaplandığını izleyiniz ve (b) de verilen ifadeyi hesaplayınız.

a) $(1 \vee 0) \vee [(0 \wedge 1) \vee (1 \vee 1')] \equiv 1 \vee [0 \vee (1 \vee 0)] \equiv 1 \vee [0 \vee 1] \equiv 1 \vee 1 \equiv 1$

b) $[(1 \wedge 1') \vee (1 \vee 0)] \wedge [(0' \vee 0) \vee (1 \wedge 0)]$

6) Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri uygun biçimde doldurunuz.

p	q	r	p′	q′	r′	$(p' \vee q)$	$(r' \wedge q)$	$q \vee q'$
0	0				1			
1				1	0			
	0	1	1					
0		0		0				
	1	0	0					
	1	1	1					
1		0		1				
1	1				0			

Şimdi, birer önerme işlemi olan $\vee$ ile $\wedge$ işlemlerinin önemli özeliklerini doğruluk tablosu yaparak gösterelim. Aşağıdaki tabloların nasıl doldurulduğunu inceleyiniz ve her tablo üzerinde, eşdeğer (denk) olan önermeleri söyleyiniz.

p	$p \vee p$
1	1
0	0

p	$p \wedge p$
1	1
0	0

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	0	0

Bu doğruluk tabloları bize aşağıdaki özeliklerin varlığını göstermektedir. Bu özelikler :

1) $(p \vee p) \equiv p$, ($\vee$ nın **tek kuvvet** özeliği)

2) $(p \wedge p) \equiv p$, ($\wedge$ nin **tek kuvvet** özeliği)

3) $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$, ($\vee$ nın **değişme** özeliği)

4) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$, ($\wedge$ nin **değişme** özeliği)

dir. Buna göre örneğin,

"İstanbul'a gittim ve vapura bindim"

bileşik önermesi ile,

"Vapura bindim ve İstanbul'a gittim"

bileşik önermesi eşdeğerdir. ($p \wedge q \equiv q \wedge p$ olduğuna dikkat ediniz.) Oysa, günlük yaşantımızda bu iki bileşik önermeye farklı anlam verilir, değil mi? Bu örnek bize, matematikte doğru sonuçlara ulaşmak için, verilen tanımlara uygun olarak düşünmemiz gerektiğini ortaya koymaktadır.

$\vee$ ile $\wedge$ işlemlerinin önemli özeliklerinden bazıları da, şunlardır:

a) $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$, ($\vee$ nın **birleşme** özeliği)

b) $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$, ($\wedge$ nin **birleşme** özeliği)

c) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, ($\vee$ nın $\wedge$ üzerine **dağılma** özeliği)

d) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, ($\wedge$ nin $\vee$ üzerine **dağılma** özeliği)

Bunlardan, (b) ile (c) deki özeliklerin varlığını gösteren doğruluk tablolarını aşağıda görüyorsunuz.

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

($\wedge$ nin birleşme özeliği)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

($\vee$ nın $\wedge$ üzerinde dağılma özeliği)

Bu tabloları inceleyiniz ve benzer biçimde (a) ve (d) de verilen özeliklerin varlığını gösteren doğruluk tabloları yapınız.

Bir önermenin değili (olumsuzu) ile ilgili olarak $(p')' \equiv p$ olduğunu göstermiştik. Şimdi, "De Morgan Kuralı" diye anılan,

$$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q' \quad \text{ile} \quad (p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$$

özeliklerinin varlığını doğruluk tablosu yaparak gösterebiliriz. Aşağıdaki tabloyu inceleyiniz. Burada, $(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$ olduğu gösterilmiştir.

p	q	p'	q'	$p \vee q$	$(p \vee q)'$	$p' \wedge q'$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

$(p \vee q)' \equiv p' \wedge q'$

Siz de, $(p \wedge q)' \equiv p' \vee q'$ olduğunu doğruluk tablosu yaparak gösteriniz. Bunlarla ilgili olarak bazı örnekler görelim.

1–6. Örnek

Aşağıda verilen önermelerin değilini yapalım.

a) Oya sinemaya gitti veya Tayfun futbol oynamadı.

b) $8<5$ ve hava bulutludur.

De Morgan kuralı uygulanarak verilen önermelerin değili alındığında,

a) Oya sinemaya gitmedi ve Tayfun futbol oynadı.

b) $8\geqslant 5$ veya hava bulutsuzdur.

önermelerinin elde edildiğini kolayca söyleyebilirsiniz.

1–7. Örnek

$p\wedge(q\vee r')$ bileşik önermesinin değilini yapalım.

$$[p\wedge(q\vee r')]'\equiv p'\vee(q\vee r')' \quad , \quad \text{(De Morgan kuralından)}$$
$$\equiv p'\vee[q'\wedge(r')'] \quad , \quad \text{(De Morgan kuralından)}$$
$$\equiv p'\vee(q'\wedge r) \quad , \quad \text{((r')'≡r olduğundan)}$$
$$\equiv(p'\vee q')\wedge(p'\vee r), \quad \text{(}\vee\text{nın }\wedge\text{ üzerine dağılma özeliğinden)}$$

olarak bulunur.

1–8. Totoloji ve Çelişki

$p\vee p'$ ile $p\wedge p'$ bileşik önermelerinin doğruluk tablolarını yapalım.

p	p′	p∨p′
1	0	1
0	1	1

p	p′	p∧p′
1	0	0
0	1	0

Buna göre, $p\vee p'\equiv 1$, $p\wedge p'\equiv 0$ dır. Doğruluk değeri daima "1" ya da daima "0" olan bileşik önermelerle ilgili olarak aşağıdaki tanımı veriyoruz.

1–8. Tanım

Bir bileşik önerme, kendisini oluşturan önermelerin her değeri için daima "1" değerini alıyorsa, bu bileşik önermeye bir **totoloji**, daima "0" değerini alıyorsa bu bileşik önermeye bir **çelişki** denir.

Bu tanıma göre, $p\vee p'$ bir totoloji ve $p\wedge p'$ de bir çelişkidir diyebiliriz. Bunun gibi,

$$p\vee 1\equiv 1 \ , \ p\wedge 0\equiv 0$$

olduğunu da kolayca gösterebilirsiniz.

1–5. Alıştırmalar

1) Aşağıda verilen denklikleri, tablo yaparak gerçekleyiniz.

a) $p\equiv(p\vee p)\wedge p$ b) $q\equiv q\vee(q\wedge q)$

2) Birinci alıştırmada verilen denklikleri uygun özelikler kullanarak tablo yapmadan sağlayınız.

3) Aşağıdaki önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu söyleyiniz

a) $p\not\equiv(p\wedge p)\wedge p$ b) $(p\wedge q')'\equiv p'\wedge q$

c) $(p'\vee q)'\equiv q'\wedge p$ d) $(p\vee q)\wedge r\equiv(r\wedge p)\vee(r\wedge q)$

e) $p\vee 0\equiv p$ f) $p\vee 1\equiv 1$

g) $p\wedge p'\equiv 0$ h) $p\wedge 0\equiv 0$

ı) $p\wedge 1\equiv p$ i) $p\vee p\equiv 1$

4) Aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri doldurunuz.

p	q	r	q∨r	q∧p	r∧p	(q∨r)∧p	(q∧p)∨(r∧p)
0	1	1	1	0	0	0	0
0	0	1					
1	1	1					
1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0					
0	0	0					
1	1	0					
1	0	0					

?

5) "Dün kar yağdı ve ders çalışmadım" önermesinin değilini (olumsuzunu) yapınız.

6) Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

a) $[(1 \vee 0)' \wedge (1' \wedge 0)]'$ b) $(0 \vee 1)' \wedge [1 \vee (1 \wedge 0)]'$

7) $(p \vee q') \wedge (p' \wedge q)$ bileşik önermesinin değilini alınız.

8) $\underline{\vee}$ simgesini "ya da" diye okuyarak elde edilen $p \,\underline{\vee}\, q$ bileşik önermesi, p ile q nun doğruluk değerleri farklı iken doğru, aynı iken yanlış olarak tanımlanıyor. Buna göre, $p \,\underline{\vee}\, q$ bileşik önermesinin doğruluk tablosunu yapınız.

9) Aşağıdaki önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu söyleyiniz. (8. alıştırmada verilen tanımı uygulayınız.)

a) $p \,\underline{\vee}\, p \equiv 0$ b) $p \,\underline{\vee}\, p \equiv 1$ c) $p \,\underline{\vee}\, p \equiv p$

d) $p \,\underline{\vee}\, q \equiv q \,\underline{\vee}\, p$ e) $p \,\underline{\vee}\, (q \,\underline{\vee}\, r) \equiv (p \,\underline{\vee}\, q) \,\underline{\vee}\, r$ f) $(p \,\underline{\vee}\, q)' \equiv p' \,\underline{\vee}\, q$

10) $(p \vee q') \wedge [p' \vee (p \wedge q)] \equiv (p' \wedge q') \vee (p \wedge q)$
olduğunu, doğruluk çizelgesi yapmadan gerekli özelikleri uygulayarak gösteriniz.

11) $[(p \wedge r') \vee (q \wedge r)] \vee (p \vee p')$ bileşik önermesinin bir totoloji olduğunu gösteriniz.

12) $(q \wedge r) \wedge [q' \wedge (r \vee p)]$ bileşik önermesinin bir çelişki olduğunu gösteriniz.

13) Aşağıdaki önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu söyleyiniz.

a) $p \vee (r \wedge q) \equiv (q \vee p) \wedge (p \vee r)$

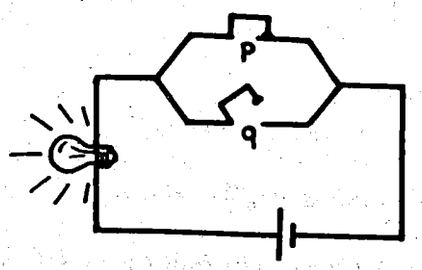
b) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee r$

c) $(p' \vee q) \wedge p \equiv q \wedge p$

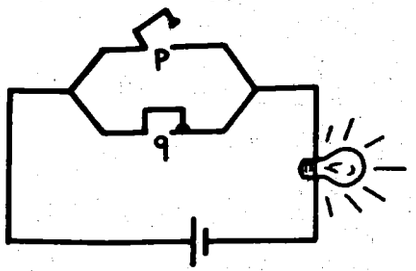
d) $p' \vee (q \wedge r \wedge p) \equiv (p' \vee q) \wedge (p' \vee r)$

14) Bir bileşik önermenin totoloji olmadığı verilirse, onun bir çelişki olduğunu söyleyebilir misiniz? Cevabınızın nedenini açıklayınız.

1–9. Mantık Kurallarının Elektrik Devrelerine Uygulanışı



(1–1. Şekil)



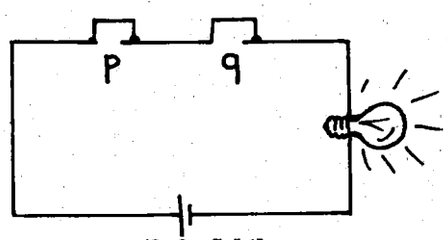
(1–2. Şekil)

Yukarıda (1–1. Şekil) ve (1–2. Şekil) deki devrelerde p ve q ile gösterilen anahtarlar paralel bağlanmışlardır. Anahtarların kapalı yani, akımı geçirecek durumlarını "1" ile, anahtarların açık yani, akımı geçirmeyecek durumunu da "0" ile gösterelim. (1–1. Şekil) de p anahtarı "1" durumunda, q anahtarı ise 0 durumundadır. Bu devreden akım geçer ve lamba yanar. (1–2. Şekil) de, p anahtarı "0" durumunda, q anahtarı ise "1" durumundadır. Bu devreden de akım geçer ve lamba yanar. Buradaki, her iki anahtarı "1" durumuna getirdiğimizde lambanın yine yanacağını kolayca söyleyebilirsiniz. Şimdi, p ve q nun durumlarına göre devreden akım geçip geçmediğini gösteren aşağıdaki tabloyu inceleyiniz.

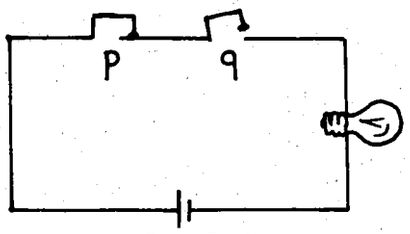
p Anahtarı	q Anahtarı	
1	1	Devreden akım geçer
1	0	Devreden akım geçer
0	1	Devreden akım geçer
0	0	Devreden akım geçmez

Devreden akım geçmesini "1" ile, devreden akım geçmemesini de "0" ile gösterirsek yukardaki tablonun, $p \vee q$ birleşik önermesinin doğruluk tablosu olduğunu görürüz.

Şimdi de, p ile q anahtarlarının seri bağlandığı devreye gözatalım. (1–3. Şekil) ve (1–4. Şekil) de p ve q anahtarlarının iki durumunu çizilmiş olarak görüyorsunuz.



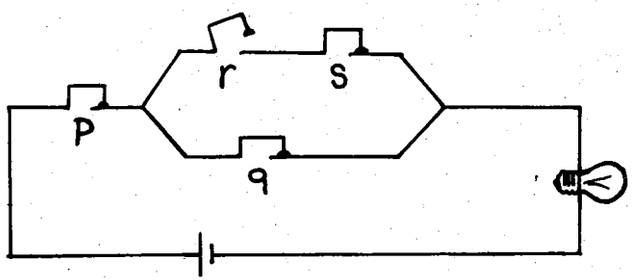
(1–3. Şekil



(1–4. Şekil)

(1–3. Şekil) de devreden akım geçtiğini, (1–4. Şekil) de ise devreden akım geçmediğini söyleyebilirsiniz. Gerçekten, anahtarların en az biri açık iken bu devreden akım geçmez. Bu devrelerden akım geçip geçmemesi ile, $p \wedge q$ bileşik önermesinin doğruluk değerleri arasında ne gibi bir ilgi görüyorsunuz? $p \wedge q$ bileşik önermesinin doğru olduğu durumda bu devrelerden akım geçer, yanlış olduğu durumlarda ise akım geçmez, diyebiliriz.

Şimdi aşağıdaki devreyi inceleyiniz.



(1–5. Şekil)

Bu elektrik devresine bir bileşik önerme karşılık getirebiliriz. Bu bileşik önerme, $p \wedge [q \vee (r \wedge s)]$ dir. (1–5. Şekil)e bakarak bu bileşik önermenin doğruluk değerini hesaplayalım.

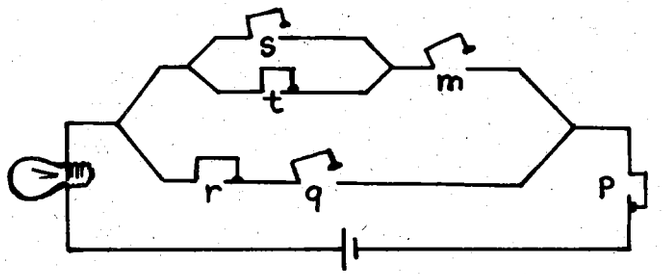
$$1 \wedge [1 \vee (0 \wedge 1)] \equiv 1 \wedge [1 \vee 0] \equiv 1 \wedge 1 \equiv 1$$

bulunur. O halde, bu devreden akım geçer.

Mantık kurallarının elektrik devreleri üzerindeki uygulamaları zamanımızda büyük gelişmeler göstermiş ve bu tür çalışmaların ürünü olan bilgisayarlar insan yaşamının vazgeçilmez gereksinmeleri durumuna gelmiştir. Şimdi, elektrik devreleri ile ilgili başka örnekler görelim.

1–8. Örnek

(1–6. Şekil) deki devreye karşı gelen bileşik önermeyi yazınız ve doğruluk değerini hesaplayarak bu devreden akım geçip geçmeyeceğini saptayınız.



(1–6. Şekil)

Çözüm : Bu devreye karşılık gelen bileşik önerme,

$$p \wedge [(q \wedge r) \vee (m \wedge (s \vee t))]$$

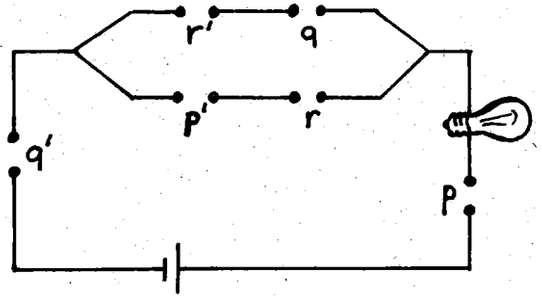
Bu bileşik önermenin doğruluk değerini hesaplayalım. (1–6. Şekil) e bakarak,

$$1 \wedge [(0 \wedge 1) \vee (0 \wedge (0 \vee 1))] \equiv 1 \wedge [0 \vee (0 \wedge 1)] \equiv 1 \wedge [0 \vee 0] \equiv 1 \wedge 0 \equiv 0$$

buluruz. Şu halde, bu devreden akım geçmez.

1–9. Örnek

(1–7. Şekil) deki anahtarların kapalı (akımı geçiren) ya da açık (akımı geçirmeyen) durumları belirtilmemiştir. Devredeki, p anahtarı kapatılınca p′ anahtarının açık olduğu, p anahtarı açık olunca p′ anahtarının kapalı olduğu ve öteki q, q′ ikilisi ile r, r′ ikilisi arasında da aynı durumun olduğu varsayılıyor. Buna göre, bu devredeki anahtarlar için kaç değişik durum olduğunu ve her durumda devreden akımın geçip geçmeyeceğini, bu devreye karşılık gelen bileşik önermenin doğruluk tablosunu yaparak bulalım.



(1–7. Şekil)

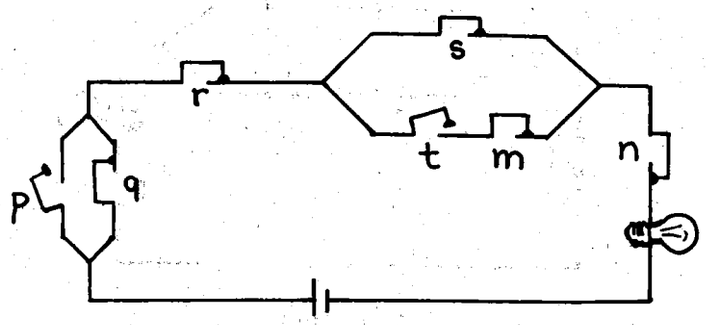
Bu devreye karşılık olarak, $q' \wedge [(r' \wedge q) \vee (p' \wedge r)] \wedge p$ bileşik önermesini yazabiliriz. Şimdi, bunun doğruluk tablosunu yapalım.

p	q	r	p′	q′	r′	r′∧q	p′∧r	(r′∧q)∨(p′∧r)	q′∧[(r′∧q)∨(p′∧r)]∧p
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0

Yukardaki doğruluk tablosunda, devreye karşılık gelen bileşik önermenin bir çelişki olduğunu görüyoruz. Öyleyse, devredeki anahtarların alabilecekleri değişik sekiz durumun hiçbirisinde bu devreden akım geçmez.

1–6. Alıştırmalar

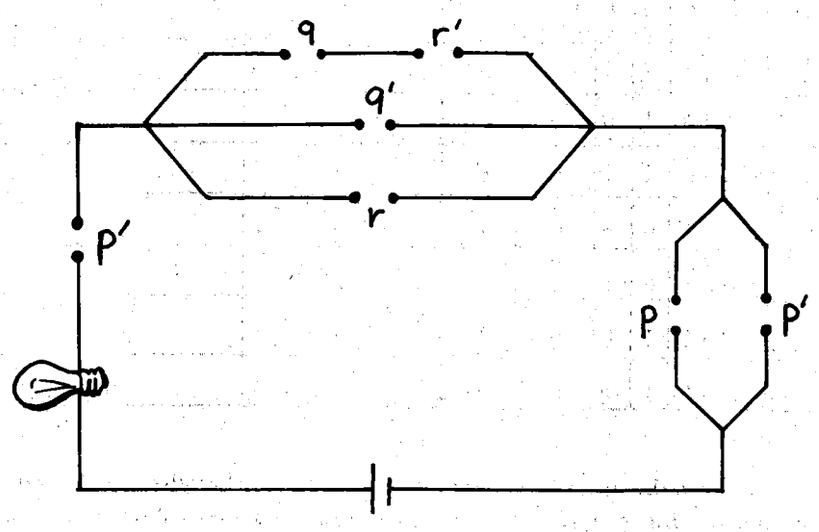
1) Aşağıda (1–8. Şekil) deki devreye karşı gelen bileşik önermeyi yazınız ve onun doğruluk değerini hesaplayınız.



(1–8. Şekil)

2) p, r, s nin doğruluk değeri "1" , q ile t nin doğruluk değeri "0" olduğuna göre, $(p \vee q) \wedge [t \wedge (r \vee s)]$ bileşik önermesine karşılık gelen devreyi çiziniz. Bu devreden akım geçip geçmeyeceğini hesaplayınız.

3)



(1–9. Şekil)

Yukardaki (1–9. Şekil) deki devreye karşılık gelen bileşik önermeyi yazınız ve anahtarların değişik durumlarına göre devreden akımın geçip geçmeyeceğini doğruluk tablosu yaparak bulunuz. (Yol : 1–9. Örnekten yararlanınız.)

1–10. Koşullu Önerme ve Gerektirme

Günlük yaşantımızda, iki önerme arasına "ise" sözcüğünü yazarak çeşitli bileşik önermeler yaparız. Sözgelimi,

Dün çarşamba ise bugün perşembedir,

Bu yüzük altın ise suda paslanmaz,

Yağmur yağarsa yer ıslanır;

gibi önermeleri sık sık kullanırız. Bu tür önermelerde, "ise" sözcüğünü $\Rightarrow$ simgesi ile gösterirsek, yukarıda "ise" ile söylediğimiz bileşik önermelerin her birini,

$$p \Rightarrow q$$

biçiminde yazar ve "p ise q" diye okuruz. Bu tür bileşik önermelerle ilgili olarak aşağıdaki tanımı veriyoruz.

1–9. Tanım

$p \Rightarrow q$ biçimindeki bileşik önermeye **koşullu önerme** denir. Bu koşullu önerme; p doğru q yanlış iken yanlış, öteki durumlarda doğrudur.

Bu tanımı uygulayarak aşağıdaki doğruluk tablosunu kolayca yapabiliriz.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Bu tanımla ilgili olarak, $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinde p ile q önermelerinin her durumu ile ilgili olarak birer örnek verelim :

a) $\underbrace{3=3}_{p\equiv 1} \Rightarrow \underbrace{9=9}_{q\equiv 1}$

koşullu önermesinin doğru olduğunu kolayca söyleyebilirsiniz. Gerçekten p önermesinde iki tarafın karesini alarak q önermesini elde ederiz, değil mi? Burada,

$$(1 \Rightarrow 1)\equiv 1$$

olduğunu görüyorsunuz.

b) $\underbrace{9=3}_{p\equiv 1} \Rightarrow \underbrace{9=5}_{q\equiv 0}$

koşullu önermesinde, p önermesinden doğru bir düşünüşle q önermesini elde etmek olanaksızdır. Öyleyse, bu koşullu önerme yanlıştır. Bu örnekte,

$$(1 \Rightarrow 0)\equiv 0$$

olduğunu görüyorsunuz.

c) $\underbrace{5=3}_{p\equiv 0} \Rightarrow \underbrace{8=8}_{q\equiv 1}$

koşullu önermesinde, p önermesinden doğru bir düşünüşle q önermesini şöyle elde edebiliriz. 5=3 ise 3=5 dir. Bu iki eşitliği taraf tarafa toplarsak 8=8 önermesi elde edilir. Bu örnekte,

$$(0 \Rightarrow 1)\equiv 1$$

olduğunu görüyorsunuz.

d) $\underbrace{5=3}_{p\equiv 0} \Rightarrow \underbrace{8=6}_{q\equiv 0}$

koşullu önermesinde de p önermesinden doğru bir düşünüşle q önermesini elde edebiliriz. 5=3 önermesinde iki tarafa 3 toplayımız. 8=6 önermesini elde ettiniz değil mi? Bu örnekte de,

$$(0 \Rightarrow 0)\equiv 1$$

olduğunu görüyorsunuz.

Şimdi, $p \Rightarrow q$ koşullu önermesi ile ilgili önemli bir özeliği içeren aşağıdaki örneği verelim.

1–10. Örnek

$$(p \Rightarrow q)\equiv(p' \vee q)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm : Aşağıdaki doğruluk tablosunu inceleyiniz.

p	q	p'	$p \Rightarrow q$	$p' \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

$(p \Rightarrow q) \equiv p' \vee q$

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinde p önermesine hipotez, q önermesine de hüküm denir. Şimdi, bir koşullu önermeden türetilen bazı koşullu önermeleri görelim.

1–10. Tanım

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinden $q \Rightarrow p$ biçiminde elde edilen koşullu önermeye $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin **karşıtı** denir.

1–11. Örnek

Bu gün pazar (p) ise yarın pazartesidir. (q)

$p \Rightarrow q$

koşullu önermesinin karşıtı,

Yarın pazartesi (q) ise bu gün pazardır. (p)

koşullu önermesidir. Bu karşıtı yaparken, $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin hipotezini hüküm, hükmünü de hipotez yaptığımıza dikkat ediniz. Bu örnekteki $p \Rightarrow q$ koşullu önermesi ile bunun karşıtı olan $q \Rightarrow p$ koşullu önermesinin doğru olduğuna dikkat ediniz.

1–12. Örnek

Bu gün pazar (p) ise tatildir. (q)

koşullu önermesinin karşıtı da,

Bu gün tatil (q) ise pazardır. (p)

koşullu önermesidir. Bu örnekte, $p \Rightarrow q$ koşullu önermesi doğru olduğu halde, bunun karşıtı olan $q \Rightarrow p$ koşullu önermesi yanlıştır. Şu halde, bir koşullu önerme doğru iken bunun karşıtı doğru ya da yanlış olabilir. Yine yanlış bir koşullu önermenin karşıtı da doğru ya da yanlış olabilir. Siz de, üç tane koşullu önerme söyleyiniz ve bunların karşıtını yapınız.

Şimdi de bir koşullu önermenin tersini tanımlayalım.

1–11. Tanım

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinden $p' \Rightarrow q'$ biçiminde elde edilen koşullu önermeye, $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin tersi denir.

1–13. Örnek

Bir açı dik açı (p) ise bu açının ölçüsü 90 derecedir (q)

koşullu önermesinin tersi,

Bir açı dik açı değil (p') ise bu açının ölçüsü 90 derece değildir (q')

Siz de bir koşullu önerme söyleyiniz ve bunun karşıtı ile karşıtının tersini yapınız. $p \Rightarrow q$ biçiminde bir önermenin karşıtının tersinin $q' \Rightarrow p'$ koşullu önermesi olduğunu görebildiniz mi? Buna kısaca, $p \Rightarrow q$ nun karşıt-tersi diyeceğiz. (1–13. Örnek) teki, $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin karşıt-tersi,

Bir açının ölçüsü 90 derece değil (q') ise bu açı dik açı değildir (p')

biçimindedir.

Bir koşullu önermenin karşıt-tersi kendisine eşdeğerdir. Yani,

$$(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$$

dir. Bu gerçeği, doğruluk tablosu yaparak gösterelim.

p	q	p′	q′	p ⇒ q	q′ ⇒ p′
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

$(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$

Şimdi de, özel bir koşullu önerme olan gerektirmeden söz edelim. $p \Rightarrow q$ koşullu önermesi için var olan dört durumun,

$$(1 \Rightarrow 1) \equiv 1,\quad (1 \Rightarrow 0) \equiv 0,\quad (0 \Rightarrow 1) \equiv 1 \text{ ve } (0 \Rightarrow 0) \equiv 1$$

olduğunu biliyorsunuz. Bunların üçünde $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin doğru olduğuna dikkat ediniz. Buna ilişkin olarak aşağıdaki tanımı veriyoruz.

1–12. Tanım

$p \Rightarrow q$ koşullu önermesinin doğruluk değeri 1 ise bu koşullu önermeye bir **gerektirme** denir ve "p gerektirir q" diye okunur. p ye q için **yeter koşul** q ye de p için **gerek koşul** denir.

1–14. Örnek

"$x=3 \Rightarrow x^2=9$" ile "$x=5 \Rightarrow 2x=6$"

koşullu önermelerinin bir gerektirme olup olmadığını söyleyelim.

$3^2=9$ olduğundan, $x=3 \Rightarrow x^2=9$ koşullu önermesi doğrudur. Öyleyse, bu koşullu önerme bir gerektirmedir. Yani, $(x=3 \Rightarrow x^2=9) \equiv 1$ yazabiliriz. Burada $x=3$ önermesinin $x^2=9$ için yeter koşul, $x^2=9$ un da $x=3$ için gerek koşul olduğuna dikkat ediniz. Şimdi, öteki koşullu önermeye bakalım.

$2.5 \neq 6$ olduğundan, $x=5 \Rightarrow 2x=6$ koşullu önermesi yanlıştır. Öyleyse, bu koşullu önerme bir gerektirme değildir.

1–11. İki Yönlü Koşullu Önerme Ve Çift Gerektirme

Bir, $p \Rightarrow q$ koşullu önermesi ile onun karşıtı olan $q \Rightarrow p$ koşullu önermesinden oluşan, $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ bileşik önermesinin doğruluk tablosunu yapalım.

p	q	p ⇒ q	q ⇒ p	(p ⇒ q) ∧ (q ⇒ p)
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Bu bileşik önerme ile ilgili olarak aşağıdaki tanımı veriyoruz.

1–13. Tanım

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ bileşik önermesine **iki yönlü koşullu önerme** denir ve $p \Leftrightarrow q$ biçiminde yazılarak "p ancak ve ancak q" diye okunur.

Bu tanıma göre, $p \Leftrightarrow q$ nun doğruluk tablosu aşağıdaki gibidir.

p	q	p ⇔ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Buna göre, örneğin,

(Bu gün pazar $\Leftrightarrow$ Bu gün tatildir) $\equiv 0$

($\widehat{ABC}$ eşkenar üçgen $\Leftrightarrow$ $\widehat{ABC}$ eş açılı üçgen) $\equiv 1$

olduğunu kolayca söyleyebilirsiniz. Doğru olan iki yönlü koşullu önermeler için aşağıdaki tanımı veriyoruz.

1–14. Tanım

$p \Leftrightarrow q$ iki yönlü koşullu önermesinin doğruluk değeri 1 ise bu önermeye bir **çift gerektirme** denir ve "p çift gerektirir q" diye okunur.

Buna göre,

"$\widehat{ABC}$ eşkenar üçgen $\Leftrightarrow$ $\widehat{ABC}$ eş açılı üçgen" önermesi bir çift gerektirmedir, değil mi?

$p \Leftrightarrow q$ çift gerektirmesinde, p ye q için hem yeter hem de gerek koşul, denir. Bunun gibi, q da p için hem yeter hem de gerek koşuldur. Buna göre,

"$\widehat{ABC}$ eşkenar üçgen $\Leftrightarrow$ $\widehat{ABC}$ eş açılı üçgen" çift gerektirmesini, "$\widehat{ABC}$ nin eşkenar üçgen olması için gerek ve yeter koşul $\widehat{ABC}$ nin eş açılı üçgen olmasıdır" diye okuyabiliriz.

1–15. Örnek

$$(x=2 \Leftrightarrow x^3=8) \text{ ile } (x=2 \Leftrightarrow x^2=4)$$

iki yönlü koşullu önermelerinin bir çift gerektirme olup olmadığını söyleyelim.

$[(x=2 \Rightarrow x^3=8) \wedge (x^3=8 \Rightarrow x=2)] \equiv 1$ olduğundan,

"$x=2 \Leftrightarrow x^3=8$" bir çift gerektirmedir. Oysa, $(-2)^2=4$ olduğu dikkate alınırsa $(x^2=4 \Rightarrow x=2) \equiv 0$ olduğu hemen anlaşılır. Öyleyse,

$(x=2 \Rightarrow x^2=4) \wedge (x^2=4 \Rightarrow x=2) \equiv 0$ olduğundan,

$x=2 \Leftrightarrow x^2=4$ iki yönlü koşullu önermesi bir çift gerektirme değildir.

1–7. Alıştırmalar

1) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow p)$ bileşik önermesinin doğruluk tablosunu yapınız.

2) $p' \Rightarrow (p \vee q)$ bileşik önermesinin doğruluk tablosunu yapınız.

3) a, b birer tamsayı olmak üzere, $a^2=b^2 \Rightarrow a=b$ koşullu önermesi veriliyor. Bu koşullu önerme bir gerektirme midir? Cevabınızın nedenini açıklayınız. Bu koşullu önermenin karşıtını, tersini ve karşıt-tersini yazınız.

4) $(p \Rightarrow q)' \equiv (p \wedge q')$ olduğunu doğruluk tablosu yapmadan gösteriniz. (Yol : $(p \Rightarrow q) \equiv (p' \vee q)$ özeliğinden yararlanınız.)

5) "Ali ders çalışmassa sınıfta kalır" koşullu önermesinin hipotez ve hükmünü söyleyiniz. Bu koşullu önermenin karşıtını, tersini ve karşıt-tersini söyleyiniz.

6) $p \Leftrightarrow q$ önermesinin değilini yapınız.

7) Aşağıdaki koşullu önermelerin hangileri bir gerektirmedir? Gerektirme olanların yeter koşulu ve gerek koşulunu söyleyiniz.

a) $5>6 \Rightarrow 7>8$ b) $2^2=4 \Rightarrow 1>3$

c) $2^3=8 \Rightarrow 1>2$ d) $4<5 \Rightarrow 5<6$

8) $[p \Rightarrow (q \vee r')] \equiv 0$ olduğu verildiğine göre, $(p' \vee q) \Rightarrow r \wedge (q' \vee p)$ bileşik önermesinin doğruluk değerini bulunuz.

9) Aşağıdaki bileşik önermelerin doğruluk tablolarını yapınız. Bunlardan, totoloji ya da çelişki olanlar varsa belirtiniz.

a) $p \Rightarrow (p \vee q)$ b) $(p \Leftrightarrow q)' \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q')$

c) $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$ d) $(p' \wedge q) \wedge p \wedge (q \Rightarrow p')$

10. Aşağıdakilerden hangileri bir çift gerektirmedir.

a) $x=-1 \Leftrightarrow x^2=1$ b) $x=0 \Leftrightarrow x^2=0$

c) ABCD bir kare $\Leftrightarrow$ ABCD nin köşegenleri diktir.

d) ABCD paralelkenar $\Leftrightarrow$ ABCD nin köşegenleri ortalar.

1–12. Aksiyom –Teorem– İspat

Bu bölümün başında, matematiğe başlarken bazı terimleri tanımsız olarak almak zorunda kaldığımızı açıklamıştık. Ancak, bir matematik yapı kurmak için bu yetmez. Bazı önermeleri de nedenini aramadan doğru olarak kabul etmek zorundayız. Böyle yapmadığımızda, hiç bir önermenin doğru olduğunu gösteremeyiz. Çünkü, ele alacağımız ilk önermenin doğruluğu için söyleyeceğimiz nedenlerin de doğru olup olmadığını araştırmaya kalksak üzerinde çalıştığımız konudan sürekli olarak uzaklaşacağımız besbellidir. Bu nedenle, bir matematik yapı kurarken, bazı önermelerin doğru olduğunu kabul ederek işe başlarız. Sözgelimi altıncı bölümde, "farklı iki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer", önermesinin doğru olduğunu kabul edeceğiz. Bunun gibi, doğru olduğu kabul edilen bir önermeye **aksiyom** denir. Aksiyomlar matematiksel yapının temel taşları sayılırlar. Ancak, aksiyom olarak alınan

bir önermenin doğruluğunu göstermenin çok kolay ya da çok güç olduğu için onun aksiyom alındığını zannetmeyiniz. Bir matematiksel yapıyı kurarken seçilen aksiyomlar bir sistem oluştururlar. Sözgelimi, altıncı bölümdeki geometri, 14 tane aksiyomdan oluşan bir sisteme dayanmaktadır. Böyle bir sistem içinde, herhangi bir aksiyomdan biri, diğerinin olumsuzunu söylemez. Neden?

Teorem sözcüğünü bugüne kadar hiç duydunuz mu? Cevabımızın "evet" olduğunu sanıyoruz. Sözgelimi,

"Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri toplam 180° dir" önermesinin bir teorem olduğunu söyleyebilirsiniz. Şimdi, teoremin tanımını yapalım.

1–15. Tanım

$p \Rightarrow q$ gerektirmesinde p önermesi doğru ise $p \Rightarrow q$ gerektirmesine bir teorem denir.

Bu tanıma göre, $p \Rightarrow q$ bir teorem ise, p nin doğruluk değeri 1 ve $p \Rightarrow q$ de bir gerektirme olduğu için doğruluk değeri "1" dir. $(1 \Rightarrow ?) \equiv 1$ in doğru olması için soru işaretli yere "1" yazılması şarttır. Şu halde, bir teoremin hipotezi ve hükmü doğru önermelerdir.

"Bir karenin köşegenleri diktir" teoremini ele alalım. Bu teoremi,

"ABCD bir kare ise ABCD nin köşegenleri diktir" biçiminde yazabiliriz. Bu teoremin hipotez ve hükmünü söyleyiniz.

Bir teoremin hipotezi doğru iken hükmünün de doğru olduğunu göstermeye, bu teoremin ispatını yapmak denir. Bir teoremin ispatında kendinden önce gelen teoremler de kullanılır. Ancak, teoremler birbirine bağlılık durumuna göre sıralansa ilk teoremin ispatında kullanacağımız bir teorem bulamayız. Şu halde, bu ilk teoremin ispatını da yapabilmek için önceden bazı önermelerin doğruluğunu kabul etmek zorundayız. Doğru olduğu ispatsız kabul edilen bir önermeye aksiyom denildiğini hatırlayınız. Teorem ise, doğruluğu ispatlanabilen bir önermedir.

Şimdi, aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

1–16. Örnek

"Ters açılar eştir" teoremini, $p \Rightarrow q$ biçiminde yazınız. Bu teoremin, tersini, karşıtını, karşıtının tersini yapınız. Bunların da bir teorem olup olmadığını söyleyiniz.

Çözüm : Bu teoremi,

$$\underbrace{\text{İki açı ters açı}}_{p} \quad \text{ise} \quad \underbrace{\text{bu iki açı eştir.}}_{q}$$

$$p \Rightarrow q$$

(1–8. Şekil)

biçiminde yazarız. Gerçekten, p doğru iken q da doğrudur. Aşağıda bu teoremin tersini, karşıtını ve karşıtının tersini sıra ile görüyorsunuz.

$$\underbrace{\text{İki açı ters açı değil}}_{p'} \quad \text{ise} \quad \underbrace{\text{bu iki açı eş değildir.}}_{q'}$$

$$p' \Rightarrow q'$$

$$\underbrace{\text{İki açı eş}}_{q} \quad \text{ise} \quad \underbrace{\text{bu iki açı ters açıdır.}}_{p}$$

$$q \Rightarrow p$$

$$\underbrace{\text{İki açı eş değil}}_{q'} \quad \text{ise} \quad \underbrace{\text{bu iki açı ters açı değildir.}}_{p'}$$

$$q' \Rightarrow p'$$

Bunlardan, $p' \Rightarrow q'$ ile $q \Rightarrow p$ nin yanlış olduklarına, $q' \Rightarrow p'$ nün doğru olduğuna dikkat ediniz. O halde, bu teoremin tersi ile karşıtı birer teorem değildir. Karşıtının tersi ise bir teoremdir. Her teoremin karşıtının tersi yine bir teoremdir. Neden? $(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$ olduğunu hatırlayınız.

Siz de, bildiğiniz bir teoremi söyleyiniz ve onu $p \Rightarrow q$ biçiminde ifade ederek hipotez ve hükmünü belirtiniz. Sonra da onun, tersini, karşıtını ve karşıtının tersini yapınız. Karşıtı doğru olan bir teorem söyleyebilir misiniz? Cevabınız "evet" olmalıdır. Eğer, $p \Rightarrow q$ teoreminin karşıtı doğru ise bunu, $p \Leftrightarrow q$ biçiminde yazabileceğimize dikkat ediniz.

$(p \Rightarrow q) \equiv (q' \Rightarrow p')$ olduğunu görmüştük. Şu halde, $p \Rightarrow q$ teoreminin ispatı yerine bunun karşıtının tersi olan, $q' \Rightarrow p'$ teoreminin ispatını yapabiliriz. Bu tür ispat yöntemine, **olmayana ergi** yöntemi denir. Aşağıdaki örnekte, olmayana ergi yöntemi ile yapılan bir ispat görüyorsunuz.

1–17. Örnek

$a \neq 3 \Rightarrow 5a - 1 \neq 14$, teoreminin ispatını, olmayana ergi yöntemi ile yapınız.

Çözüm : Bu teoremin hipotezine p hükmüne q diyelim. q′ den işe başlayacağımızı biliyorsunuz.

$$\underbrace{(5a-1\neq 14)'}_{q'} \equiv (5a-1=14) \Rightarrow 5a=15$$
$$\Rightarrow \underbrace{a=3}_{p'}$$

dür. Böylece, $q' \Rightarrow p'$ olduğunu göstererek, $p \Rightarrow q$ teoreminin ispatını yapmış olduk.

Bir teoremin nasıl ispatlandığını yeri geldikçe yapacağımız ispatlarla uygulayarak öğreneceksiniz.

1–8. Alıştırmalar

1) "a tek sayı $\Rightarrow$ a^2 tek sayı" teoreminin tersini, karşıtını, karşıtının tersini söyleyiniz. Bunların hangileri doğru, hangileri yanlıştır?

2) "Bir paralelkenarda karşılıklı kenarlar eştir." teoremini, $p \Rightarrow q$ biçiminde ifade ederek hipotez ve hükmünü belirtiniz. Bu teoremin karşıtını yapınız. Bu karşıt da bir teorem midir?

3) Pisagor teoremini öğreniniz ve hipotez ile hükmünü belirtiniz. Pisagor teoreminin karşıtını söyleyiniz. Pisagor teoremi ile karşıtını, "gerek ve yeter koşul" ile ifade edebiliriz. Neden?

4) Aşağıdaki teoremleri, olmayana ergi yöntemi ile ispatlayınız.

a) $a\neq 8 \Rightarrow 6a+2\neq 50$ b) $2a+1\neq 21 \Rightarrow a\neq 10$

5) Aksiyom ile teorem arasındaki farkı belirtiniz.

1–13. Matematikte Kullanılan Niceleyiciler

Günlük yaşamımızda, "bazı günler sinemaya giderim", "her gün ders çalışırım" gibi önermeler söyleriz. Bunun gibi matematikte, "bazı" veya "her" niceleyicileri ile yapılan birçok önermeler vardır. "Bazı" sözcüğü "en az bir" anlamındadır. Bu sözcükle söylenen bir önermeyi gerçekleyen en az bir örnek var ise bu önerme doğrudur. Onun için "bazı" niceleyicisine, "**varlıksal niceleyici**" de denir. Örneğin, "Bazı sayılar çifttir" önermesi doğrudur, Çünkü, çift olan en az bir sayı söyleyebiliriz. Yine, "Bazı asal sayılar çifttir" önermesi de, asal olan yalnız bir tane çift sayı olduğu için doğrudur. (2 nin hem çift hem de asal sayı olduğunu hatırlayınız). "Bazı tamsayıların karesi negatiftir" önermesi ise yanlıştır. Çünkü karesi negatif olan hiçbir tamsayı yoktur.

"Her" kelimesi, "tüm" anlamındadır. Bu sözcükle yapılan bir önermenin doğru olması için sözkonusu tüm elemanların bu önermeyi gerçeklemesi şarttır. Onun için "her" niceleyicisine "**evrensel niceleyici**" de denir. Sözgelimi, "Her insan 40 yaşındadır" önermesi yanlıştır. Çünkü 40 yaşında olmayan en az bir insan söyleyebiliriz. "Bazı insanlar 40 yaşındadır" önermesi ise doğrudur. Neden? (40 yaşında olan bir insanı örnek olarak söyleyiniz.)

"Her hafta yedi gündür" önermesi doğrudur. Çünkü, gün sayısı yediden az veya çok olan bir hafta yoktur? "Her şubat ayı 28 gündür", önermesi doğru değildir. Neden?

1–18. Örnek

Aşağıda, "bazı" ve "her" niceleyicileri ile söylenmiş olan önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu söyleyiniz.

a) Bazı şubat ayları 29 gündür.

b) Her şubat ayı 28 gündür.

c) Her çift sayı 2 ile bölünür.

d) Bazı çift sayılar 2 ile bölünür.

Çözüm : (a) Doğru (b) Yanlış (c) Doğru (d) Doğru

"Bazı kelimesine, varlıksal niceleyici" denir ve $\exists$ sembolü ile gösterilir. "Her" kelimesine de, "evrensel niceleyici" denir ve $\forall$ sembolü ile gösterilir. Örneğin,

Bazı sayılar çifttir,

önermesini, $\exists$ sembolünü kullanarak,

$\exists$ sayılar çifttir,

biçiminde yazacağız. Yine

Her gün kar yağar,

önermesini de $\forall$ sembolünü kullanarak,

$\forall$ gün kar yağar

biçiminde yazacağız. Bir önermede sözkonusu olan elemanları x ile gösterirsek o önermeyi daha kısa biçimde yazabiliriz. Örneğin,

$\exists$ sayılar çifttir,

önermesini, x bir sayıyı göstermek üzere,

$\exists$ x, x çifttir,

biçiminde yazar ve "en az bir x için x çifttir" veya "bazı x ler için x çifttir" diye okuruz. Bu önermenin doğru olduğunu kolayca söyleyebilirsiniz. Bunun gibi,

$\forall$ sayı 3 ten büyüktür.

önermesini de, x bir sayıyı göstermek üzere,

$\forall x,\ x>3$

biçiminde yazar ve "her x sayısı için $x>3$ tür" veya, "tüm x sayıları için $x>3$ tür" diye okuruz. Bu önerme yanlıştır. Çünkü; x için, 3 ten büyük olmayan, sözgelimi 2 yi söyleyebilirsiniz. Burada, $x>3$ açık önermesini $p(x)$ ile gösterirsek yukarıdaki önermeyi, $\forall x, p(x)$, biçiminde formüle edebiliriz. Bunun gibi, "x çifttir" açık önermesini $p(x)$ ile gösterirsek, "$\exists x$, x çifttir;" önermesini de kısaca, $\exists x, p(x)$ biçiminde gösterebiliriz. Sonuç olarak, evrensel niceleyicisi ile söylenen bir, $\forall x, p(x)$ önermesinin doğru olması için sözkonusu tüm x ler için $p(x)$ doğru olmalıdır. Varlıksal niceleyici ile, $\exists x, p(x)$ biçiminde söylenen bir önermenin doğru olması için de en az bir x için $p(x)$ doğru olmalıdır.

1–19. Örnek

Aşağıdaki önermelerde x tamsayıdır. Bu önermelerin doğru mu yoksa yanlış mı olduğunu söyleyiniz.

a) $\exists x,\ 4x+1<8$ b) $\forall x,\ x^2\geqslant 0$

c) $\forall x,\ x-1>5$ d) $\exists x, x^2=x$

Çözüm : (a) $x=1$ için bu önerme gerçeklenir. O halde, doğrudur.

b) Her tamsayı bu önermeyi gerçekler. Bu önerme doğrudur.

c) Örneğin, $x=3$ alırsak bu önerme gerçeklenmez. Şu halde, bu önerme yanlıştır.

d) $x=1$ ya da $x=0$ için $x^2=x$ olduğundan bu önermeyi gerçekleyen en az bir tamsayı vardır. Şu halde, bu önerme doğrudur.

Şimdi, de, niceleyicilerle söylenen bir önermenin olumsuzunun nasıl yapılacağını görelim :

Bazı günler okul tatildir.

önermesini ele alalım. Bu önermenin doğru olduğunu ve doğru bir önermenin değilinin yanlış olduğunu bildiğiniz için bunun değilinin yanlış olacağını söyleyebilirsiniz. Bu önermenin değilinin,

Bazı günler okul tatil değildir.

önermesi olacağını düşünebilirsiniz. Ancak, bu önermenin de doğru olduğuna dikkat ediniz. Gerçekten, değil yaparken, "bazı" niceleyicisini "her" niceleyicisine çevirmeliyiz. Buna göre, yukarıda verilen önermenin değili,

Her gün okul tatil değildir.

önermesidir. Bunun gibi,

Her gün ders çalışırım.

önermesinin değili de,

Bazı günler ders çalışmam.

önermesidir. Şu halde, $p(x)$ bir açık önerme olmak üzere,

$(\forall x, p(x))' \equiv \exists x, p'(x)$, $(\exists x, p(x))' \equiv \forall x, p'(x)$ yazabiliriz.

1–20. Örnek

Aşağıdakileri inceleyiniz.

a) (Bazı sayılar asaldır)' $\equiv$ Her sayı asal değildir.

b) (Bazı günler ders çalışmayız)' $\equiv$ Her gün ders çalışırız.

c) (Her sayı pozitiftir)' $\equiv$ Bazı sayılar pozitif değildir.

d) $(\forall x, x+3=8)' \equiv \exists x, x+3\neq 8$

e) $(\exists x, x-1<0)' \equiv \forall x, x-1\geqslant 0$

f) $[(\forall x, x^2\geqslant 0)\vee(\exists x, x^2<x)]'$

$=(\forall x, x^2\geqslant 0)'\wedge(\exists x, x^2<x)' \equiv \exists x, x^2<0\wedge\forall x, x^2\geqslant x$

1–9. Alıştırmalar

1) Aşağıdaki önermelerde x tamsayıdır. Bu önermelerin doğru yoksa yanlış mı olduğunu söyleyiniz.

a) $\forall x, x=x$ b) $\exists x, x^2+3x-1<0$

c) $\forall x, x^2-1\geqslant 0$ d) $(\exists x, x^2-x>3)\wedge(\forall x, x<4)$

2) 1. alıştırmadaki önermelerin değilini yapınız.

3) $[(\forall x, 2x-1>x^2)\vee(\forall x, x^2-1=(x-1)(x+1)]$ önermesinin değilini alınız. Elde ettiğiniz önermenin tekrar değilini alınız.

BİRİNCİ BÖLÜMLE İLGİLİ TESTLER

1) Aşağıdakilerden hangisi bir önermedir?

a) Yarın Ankara'ya gidelim. b) Ders çalıştınız mı?

c) 3 ile 2 yi toplayınız. d) 5 ile 3 ün toplamı 7 dir.

e) Bir önerme söyleyiniz.

2) Aşağıdakilerden hangisi $x^2<9$ açık önermesini doğru yapar?

(a) $x=3$ (b) $x=2$ (c) $x=-3$ (d) $x=4$ (e) $x=5$

3) Aşağıdakilerden hangisi, "Kışın kar yağmaz" önermesinin değilidir?

(a) Yazın kar yağar. (b) Kışın kar yağar.
(c) Kışın kar yağabilir. (d) Yazın kar yağmaz.
(e) Hiçbiri

4) Aşağıdakilerden hangisi, $p \vee (q' \wedge r)$ bileşik önermesinin olumsuzudur?

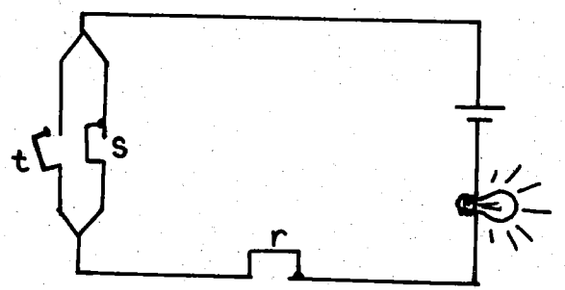
(a) $(p' \wedge q) \vee (p' \wedge r')$ (b) $p' \wedge (q \wedge r')$
(c) $(p' \wedge q) \vee r$ (d) $p' \wedge (q' \vee r)$
(e) $(p' \vee r') \wedge q$

5) Aşağıdakilerden hangisi $\vee$ nın $\wedge$ üzerine dağılma özeliğidir?

(a) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \wedge r)$
(b) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
(c) $q \vee (p \wedge r) \equiv (q \vee p) \wedge (p \vee r)$
(d) $r \vee (q \wedge p) \equiv (r \vee q) \wedge (r \vee p)$
(e) $r \wedge (q \vee p) \equiv (r \wedge q) \vee (r \wedge p)$

6) Aşağıdaki bileşik önermelerden hangisi (1-9. Şekil) deki devreye karşı gelir?

(a) $(r \wedge s) \vee t$
(b) $s \vee (t \wedge r)$
(c) $t \vee (s \wedge r)$
(d) $(r \wedge t) \vee s$
(e) $r \wedge (t \vee s)$



(1–9. Şekil)

7) Aşağıdakilerden hangisi $r \Rightarrow t$ koşullu önermesine denktir.

(a) $r' \Rightarrow t'$ (b) $t \Rightarrow r$ (c) $t \vee r'$
(d) $t' \Rightarrow r$ (e) $r \vee t$

8) Aşağıdakilerden hangisi $(p \Leftrightarrow q)'$ önermesine denktir?

(a) $q' \Leftrightarrow p$ (b) $p' \vee q'$ (c) $p' \wedge q'$
(d) $p' \Rightarrow q$ (e) $q' \Rightarrow p$

9) x tamsayı olduğuna göre aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

(a) $\forall x, x^2>x$ (b) $\forall x, -x<0$ (c) $\exists x, x^2<0$
(d) $\exists x, x^2-x<0$ (e) $\exists x, x^2-3<0$

10) x tamsayı olmak üzere, $\forall x, x^2-5x-1<0$ önermesinin değili aşağıdakilerden hangisidir?

(a) $\exists x, x^2-5x-1>0$ (b) $\exists x, x^2-5x \geqslant 1$
(c) $\exists x, x^2-5x-1=0$ (d) $\exists x, -x^2+5x+1 \geqslant 0$
(e) $\exists x, x^2-5x-1 \leqslant 0$

İKİNCİ BÖLÜM

KÜMELER (CÜMLELER)

2–1. Küme Kavramı

Matematiğin dilinin mantığa dayalı olarak kurulduğunu biliyorsunuz. Kümeler (cümleler) de bu dili zenginleştirerek, matematiğin anlatımını kolaylaştırır. Matematikte, küme (cümle) kavramından yararlanarak günlük yaşamımızla ilgili örnekler üzerinde çalışma olanağı bulacaksınız. Küme kavramı, matematiği güzelleştirir, güçlendirir.

Küme kavramını tanımsız olarak alacağız. Eşya, canlı ve kavramların her birine nesne diyelim. Küme deyince, nesnelerden oluşan topluluk akla gelmelidir. Bazen sınıfınızda, kümelere ayrılarak çalışmalar yaptığınızı hatırlayınız. Gerçekten, küme kavramı günlük yaşamımızın içerisinde mevcuttur. Örneğin, sınıfınızda bulunan kız öğrencilerin kümesini, gözlüklü öğrencilerin kümesini, okulunuzdaki matematik öğretmenlerinin kümesini, düşünebilirsiniz. Ayrıca, sınıfınızla ilgili olan ders kitaplarının kümesini, karnenize not olarak yazılabilen sayıların kümesini, birinci ligde oynayan futbol takımlarının kümesini de düşünebilirsiniz.

Bir kümeyi oluşturan nesnelerin her birine o kümenin bir elemanı denir. Çoğunlukla bir kümeyi elemanlarını yazarak belirtiriz. Bunun için kümenin elemanları, aralarına virgül konarak bir parantez içine yazılır. Bir kümenin böyle yazılışına, liste yöntemi ile yazılışı denir.

2–1. Örnek

Adı "p" harfi ile başlayan günlerin kümesini liste yöntemi ile yazınız.

Çözüm : Bu kümeyi, liste yöntemi ile,

{pazartesi, perşembe, pazar}

biçiminde yazarız. İsterseniz. Siz de, elemanların yazılış sırasını değiştirerek de aynı kümeyi yazabilirsiniz. Sözgelimi, bu kümeyi,

{pazar, pazartesi, perşembe}

biçiminde de yazabilirsiniz. Elemanların yazılış sırasını değiştirerek aynı kümeyi daha dört değişik biçimde yazınız.

2–2. Örnek

Alfabemizdeki sesli (ünlü) küçük harflerin kümesini yazınız.

Çözüm : Bu küme, {a, e, ı, i, o, ö, u, ü} dir. (Elemanların yazılış sırasının önemli olmadığını hatırlayınız.)

Kolaylık olsun diye, kümeleri A, B, C, ... gibi büyük harflerle adlandıracağız. Sözgelimi, yukarıda yazdığımız sesli (ünlü) küçük harflerin kümesine A dersek,

$$A = \{a, e, ı, i, o, ö, u, ü\}$$

dür. Burada, e harfi A kümesinin bir elemanıdır. Yani, e harfi A kümesine aittir. Bunu, $e \in A$ biçiminde yazacağız. $\in$ sembolü, eleman olma (veya ait olma) anlamındadır. Şu halde, $a \in A$, $ö \in A$ ve $u \in A$ da yazabiliriz. Örneğin, b harfi A kümesine ait değildir. Bunu da kısaca, $b \notin A$ biçiminde yazacağız. Bunun gibi, $d \notin A$, $y \notin A$ da yazabiliriz. Bu A kümesinde sekiz tane eleman olduğunu biliyorsunuz. Bunu da kısaca,

$$s(A) = 8$$

biçiminde yazarız ve "A kümesinin eleman sayısı sekizdir" diye okuruz. Örneğin, $B = \{a, b, c\}$ ise $s(B) = 3$ tür.

Liste yöntemi ile bir kümeyi yazarken o kümenin bir elemanı yalnız bir kere yazılır. Söz gelimi, $A = \{1, 2, 2\}$ biçiminde bir küme düşünülemez.

2–3. Örnek

$$A = \{1, 2, t, \Delta\}$$

kümesi veriliyor. Buna göre, aşağıdaki önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu söyleyiniz.

(a) $1 \notin A$ (b) $t \in A$ (c) $3 \in A$

(d) $\Delta \in A$ (e) $s(A) = 3$

Çözüm : (a) Yanlış (b) Doğru (c) Yanlış

(d) Doğru (e) Yanlış

Pozitif tamsayılardan (sayma sayılarından) oluşan kümeye B diyelim. Bu kümeyi, liste yöntemi ile,

$B=\{1, 2, 3, \ldots\}$ biçiminde yazarız. Buradaki üç tane nokta bize, benzer biçimde düşünülerek, bu kümenin elemanlarının sonsuz çoklukta yazılabileceğini anlatır.

Bir A kümesinin elemanlarının ortak bir özeliği varsa ve bu ortak özeliğe sahip olan elemanlar yalnız bu kümeyi oluşturuyorlarsa, A kümesinin elemanlarını x ile gösterir ve x si belirten gerek ve yeter koşulu aşağıdaki gibi parentez içindeki noktalı yere yazarak, bu kümeyi,

$$A=\{x| \quad \ldots\}$$

biçiminde de yazabiliriz. Bu yönteme de "ortak özelik yöntemi" diyeceğiz.

2-4. Örnek

Ortak özelik yöntemi ile yazılmış olan,

$$A=\{x| \text{ x tam sayı ve } x^2=4\}$$

kümesini liste yöntemi ile yazınız.

Çözüm : Bu yazılışı, "A kümesi öyle x elemanlarından oluşmaktadır ki, x, karesi 4 eden tamsayıdır" diye okuruz. Yani, A kümesinin her elemanının karesi 4 dür ve karesi 4 olan her tamsayı A kümesinin bir elemanıdır. Buna göre, A kümesini liste yöntemi ile,

$$A=\{-2,2\}$$

biçiminde yazarız.

Bir kümeyi yazabilmemiz için, hangi nesnelerin onun elemanı olduğu, hangilerinin ise onun elemanı olmadığı kesinlikle belli olmalıdır. Örneğin, en çok sevilen üç ders kitabının adlarından oluşan bir kümeyi yazamayız. Çünkü, hangi ders kitaplarının en çok sevildiğini ortaya çıkarmak olanaksızdır. Bunun gibi, sınıfınızdaki çok çalışkan öğrencilerin kümesini de yazamazsınız. Neden? Oysa, sınıfınızdaki numarası tek sayı olan öğrencilerin kümesini kolayca yazabilirsiniz. Çünkü, bu kümenin elemanları kesinlikle bellidir. Bu kümeyi yazınız.

Boş Küme

Sınıfınızdaki, 10 yaşında olan öğrencilerin kümesini yazmanız istenirse, hiç birinizin bu kümenin elemanı olmadığını kesinlikle söyleyebilirsiniz. Böyle hiç elemanı olmayan bir kümeye boş küme denir ve $\{\ \}$ yada $\emptyset$ simgesi ile gösterilir. Söz gelimi, 1, 2, 3 rakamları ile yapılan ve 500 den büyük olan üç basamaklı sayıların kümesi de boş kümedir. Boş kümenin eleman sayısı sıfırdır.

2-5. Örnek

Aşağıdaki kümeleri liste yöntemi ile yazınız ve eleman sayılarını söyleyiniz.

a) $A=\{x|x \text{ tamsayı ve } 0<x<6\}$

b) $B=\{x|x, \text{ güzel resim çizen kimse}\}$

c) $C=\{x|x, \text{ baş harfi E ile başlayan gün ismi}\}$

d) $D=\{x|x, \text{ ANKARA kelimesindeki harf}\}$

Çözüm : a) $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ dir.

b) B kümesi yazılmaz. Neden?

c) $C=\{\ \}$ veya $C=\emptyset$ dir.

d) $D=\{A, N, K, R\}$ dir. (Kümede bir elemanın yalnız bir kez yazıldığını hatırlayınız).

Şimdi iki kümenin eşit olmasının tanımını vereceğiz.

2-1. Tanım

Aynı elemanlardan oluşan iki kümeye **eşit kümeler** denir ve A ile B kümelerinin eşit olması, $A=B$ biçiminde yazılarak, "A eşittir B" diye okunur.

2-6. Örnek

$A=\{a, c, e, t\}$ $\quad B=\{a, b, c, e, t\}$

$C=\{a, c, e, t, y\}$ $\quad D=\{e, a, t, c\}$

kümeleri veriliyor. Buna göre, aşağıdaki önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu söyleyiniz.

a) $A=B$ $\quad$ b) $A\neq C$ $\quad$ c) $D=A$ $\quad$ d) $B=C$

Çözüm : a) Yanlış $\quad$ b) Doğru $\quad$ c) Doğru $\quad$ d) Yanlış

Nedenlerini siz söyleyiniz.

Eşit iki kümenin eleman sayıları hakkında ne diyebilirsiniz? Karşıt olarak, eleman sayıları eşit olan iki küme eşit olmak zorunda mıdır?

2–1. Alıştırmalar

1. A={–2, –1, 0, 1, 2, {3}} kümesi veriliyor. Aşağıdaki karelerin yerine $\in$ veya $\notin$ sembollerinden uygun geleni yazarak doğru önermeler elde ediniz.

a) 1□A b) 4□A c) –1□A

d) 0□A e) 3□A f) {3}□A

2. Aşağıda, ortak özelik yöntemi ile verilen kümeleri, liste yöntemi ile yazınız. Her kümenin eleman sayısını söyleyiniz.

a) A={x|x, baş harfi A ile başlayan ilimiz}

b) B={x|x tamsayı ve $x \geqslant 8$}

c) C={x|x tamsayı ve $x^2=0$}

d) D={x|x, bugün 300 yaşında olan insan}

e) E={x|x tamsayı ve $x^2<0$}

3. Aşağıda, liste yöntemi ile verilen kümeleri, ortak özelik yöntemi ile yazınız.

a) A={0, 1, 2, 3}

b) C={0, 1, 4, 9, 16, 25}

c) C={0, 2, 4, 6, 8, ...}

d) D={1, 3, 5, 7, ...}

4. Aşağıda verilen kümelerden herbirinin eleman sayısını söyleyiniz. Bu kümelerden eşit olanlar varsa belirtiniz.

a) A={x|x tamsayı ve $-2 \leqslant x < 4$} b) B={–2, –1, 0, 1, 2}

c) C={–2 –1, 0, 2, 3} d) D={0, –1, –2, 1, 2}

e) Ø f) {Ø}

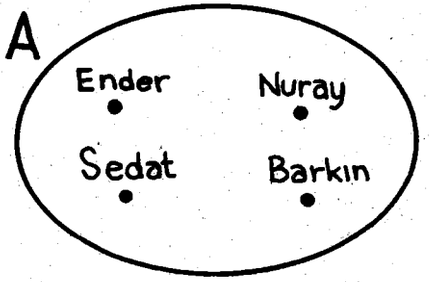
2–2. Kümelerin Venn Şeması İle Gösterimi

Kümelerin, kolay anlaşılır bir gösterimini elde etmek için Venn şeması denen kapalı eğriler kullanılır. Kümenin elemanları bu kapalı eğrilerin içine yazılır.

2–7. Örnek

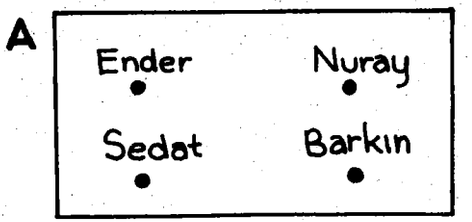
A = {Ender, Nuray, Sedat, Barkın}

kümesini Venn şeması ile aşağıdaki biçimde gösteririz.



(2–1. Şekil)

Venn şeması ile göstermelerde, kapalı eğriyi istediğiniz biçimde çizebilirsiniz. Söz gelimi, yukarıdaki kümeyi isterseniz (2–2. Şekil) de görüldüğü gibi de çizebilirsiniz.



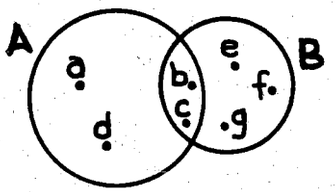
(2–2. Şekil)

2–8. Örnek

A={a, b, c, d}, B={b, c, e, f, g}

kümelerini Venn şeması ile gösteriniz.

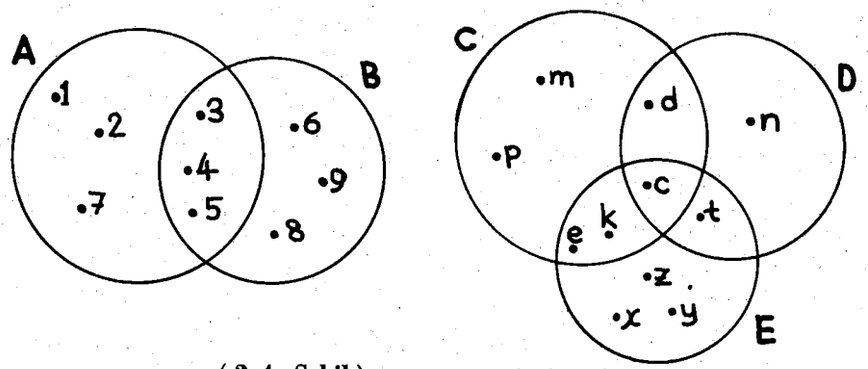
Çözüm : (2–3. Şekil) i inceleyiniz.



(2–3. Şekil)

2–9. Örnek

(2–4. Şekil) deki Venn şemalarına bakarak, A, B, C, D, E kümelerini, liste yöntemi ile yazınız.



(2–4. Şekil)

Çözüm : A={1, 2, 3, 4, 5, 7}, B={3, 4, 5, 6, 8, 9}

C={m, p, d, c, e, k}, D={d, c, n, t} E={e, k, t, c, x, y, z} dir.

Kümelerin Venn şeması ile gösterilmesi onların kolay anlaşılır olmasını temin ettiği gibi, kümeler arasındaki ilişkilerin açıkça belirtilmesine de olanak verir. Küme ile ilgili sorularda, konuya uygun Venn şeması çizmeniz, çözümü kolayca yapmanızı sağlar.

2–2. Alıştırmalar

1) Aşağıda verilen kümelerin herbirini ayrı ayrı Venn şeması ile gösteriniz.

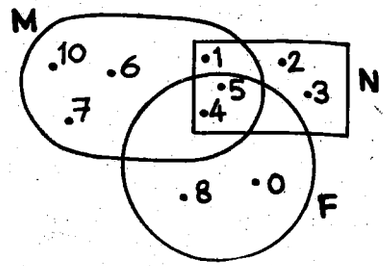
a) A={x|x tamsayı ve $x^2-9=0$}

b) B={x|x, sınıfımızda adı N ile başlayan öğrenci}

c) C={a, b, Ø, {a}}

d) D={x|x asal sayı ve $x<25$}

2) (2–5. Şekil) deki Venn şemasına bakarak M, N, F kümelerini liste yöntemi ile yazınız.



(2–5. Şekil)

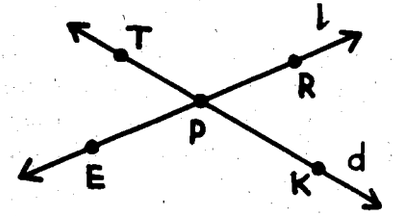
3) A={–2, 0, 1, 3, Ø, {3}, {–2, 1}} olduğuna göre aşağıdaki önermelerin doğru ya da yanlış olduklarını söyleyiniz.

a) $-2 \notin A$ b) $\{-2\} \in A$ c) $\{-2, 1\} \in A$

d) $\emptyset \in A$ e) $\{\emptyset\} \in A$ f) $\{3\} \in A$

g) $0 \in A$ h) $3 \in A$

4) Bir doğru, elemanları noktalar olan bir kümedir. (2–6. Şekil) e göre aşağıdaki önermelerin doğru ya da yanlış olduklarını söyleyiniz.



(2–6. Şekil)

a) $R \in l$ b) $T \notin l$ c) $E \in d$

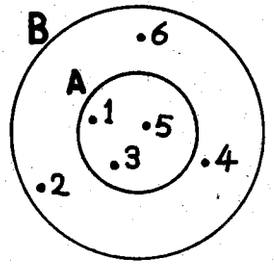
d) $P \in d$ e) $P \notin l$ f) $K \in d$

2–3. Alt Küme

Okulunuzdaki öğrencilerin kümesine E sınıfımızdaki öğrencilerin kümesine de F diyelim. F kümesinin her elemanı E kümesinin de bir elemanı mıdır? Bunun gibi,

A = {1, 3, 5}, B = {1 2, 3, 4, 5, 6}

kümelerini göz önüne alalım. A kümesinin her elemanının B kümesinin de bir elemanı olduğunu görüyorsunuz. Bu iki kümeyi Venn şeması ile aşağıdaki gibi gösterebiliriz.



(2–7. Şekil)

2–2. Tanım

Bir A kümesinin her elemanı bir B kümesinin de elemanı ise A kümesine B kümesinin bir **alt kümesi** denir ve $A \subset B$ ya da $B \supset A$ biçimlerinde yazılarak "A kümesi B nin içindedir" ya da "B kümesi A kümesini içine alır" diye okunur.

Bu tanıma göre, eğer bir A kümesinde B de olmayan en az bir eleman varsa, A kümesi B nin bir alt kümesi olamaz. Bu durumu, $A \not\subset B$ biçiminde yazarız ve "A kümesi B nin bir alt kümesi değildir". veya "A kümesi B nin içinde değildir" diye okuruz.

2–10. Örnek

$A = \{a, d\}$ $B = \{a, c, d\}$ $C = \{a, b, c, d\}$

olduğuna göre aşağıdaki alt küme ile ilgili olarak verilen önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu söyleyiniz.

a) $A \subset B$ b) $A \subset C$ c) $B \not\subset C$

b) $B \subset C$ e) $C \subset B$ f) $A \subset A$

Çözüm : a) Doğru b) Doğru c) Yanlış

d) Doğru e) Yanlış f) Doğru

Bu çözümde, $A \subset A$ önermesinin doğru olduğunu söyledik. Gerçekten A kümesinin her elemanı yine A kümesinin bir elemanıdır, diyebiliriz. Öyleyse, 2–2. Tanım gereğince $A \subset A$ dır. Bunun gibi, boş küme her kümenin bir alt kümesidir. Neden? Ø de olan ve bir A kümesinde olmayan hiç bir eleman söyleyemeyiz. Şu halde, her A kümesi için, $\emptyset \subset A$ dır.

2–11. Örnek

$A = \{a, b, c\}$ kümesinin tüm alt kümelerini yazınız.

Çözüm : $A = \{a, b, c\}$ nin sekiz tane alt kümesi vardır. Bunları aşağıda görüyorsunuz.

$$\{a, b, c\}$$

$$\{a, b\} \ , \ \{a, c\} \ , \ \{b, c\}$$

$$\{a\} \ , \ \{b\} \ , \ \{c\}$$

$$\emptyset$$

Siz de, bir elemanlı, iki elemanlı ve dört elemanlı birer küme alıp, onların tüm alt kümelerini yazınız. Ø nin kaç tane alt kümesi vardır? Bir kümenin eleman sayısı ile tüm alt kümelerinin sayısı arasında bir bağıntı bulmaya çalışınız. ($s(A)=n$ ise A nın 2^n tane alt kümesi olduğunu görünüz.)

2.12. Örnek

$(A \subset B$ ve $B \subset A) \Leftrightarrow A = B$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $A \subset B \Rightarrow$ A nın tüm elemanları B dedir.

$B \subset A \Rightarrow$ B nin elemanları A dadır.

O halde, A ile B aynı elemanlardan oluşan iki küme oldukları için $A = B$ dir. Ayrıca,

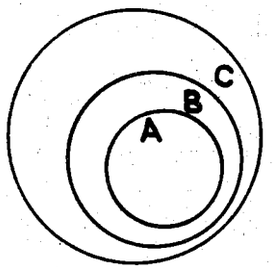
$(A = B) \Rightarrow$ (A nın her elemanı B de ve B nin her elemanı A dadır.)

$\Rightarrow$ ($A \subset B$ ve $B \subset A$ dır.)

2–13. Örnek

$A \subset B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $A \subset B$ olduğundan A nın tüm elemanları B dedir. $B \subset C$ olduğu için de B nin tüm elemanları C dedir. Buradan, A nın tüm elemanlarının C nin de elemanı olduğunu söyleyebilirsiniz. (2–8. Şekil)'i inceleyiniz. Bu duruma uygun bir de örnek veriniz.



(2–8. Şekil)

2–3. Tanım

Bir kümenin, varsa kendisinden farklı her alt kümesine, bu kümenin bir **öz alt kümesi** denir.

Bu tanıma göre, söz gelimi, $A=\{a, b\}$ kümesinin tam üç tane öz alt kümesi vardır. Ve bunlar, $\{a\}$, $\{b\}$ ve $\emptyset$ dir.

Eleman sayısı n olan bir kümenin 2^n tane alt kümesi olacağını söylemiştik. Bu kümenin $2^2 - 1$ tane öz alt kümesi olacağını kolayca söyleyebilirsiniz.

2–3. Alıştırmalar

1) $A=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesinin dört elemanlı olan tüm alt kümelerini yazınız.

2) $A=\{x, y, z\}$ ve $B=\{a, x, z, t\}$ kümeleri veriliyor. Hem A nın hem de B nin alt kümesi olan kümeleri yazınız.

3) $A=\{1, 2\}$ $B=\{0, 2, 4\}$ kümeleri veriliyor. $A \subset C$ ve $B \subset C$ olacak biçimde dört elemanlı bir C kümesi yazınız.

4) $A=\{0, 1, 2\}$ kümesinin tüm öz alt kümelerini yazınız.

5) $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{c, d\}$ kümeleri veriliyor. $B \subset C \subset A$ koşuluna uygun tüm C kümelerini yazınız.

6) Asal sayıların kümesi, tek sayıların kümesinin bir alt kümesi midir?

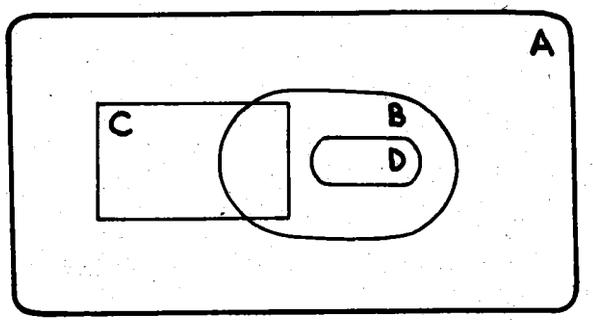
7) $A=\{a, \{b\}, \{b, c\}\}$ olduğuna göre, aşağıdaki önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu söyleyiniz.

a) $\{a\} \subset A$ b) $\{b\} \subset A$ c) $\{c\} \subset A$

d) $\{b, c\} \subset A$ e) $\{a, b, c\} \not\subset A$

8) (2–9. Şekil)'e bakarak aşağıdaki önermelerin doğru veya yanlış olduklarını söyleyiniz.

a) $D \not\subset A$ b) $C \subset B$ c) $D \subset B$ d) $C \subset A$



(2–9. Şekil)

9) Bir E düzlemi içinde bir d doğrusu çiziliyor. Buna göre, aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur. Neden?

a) $d \subset E$ b) $E \subset d$

2–4. Kümelerin Birleşimi

Okulunuzun onbir kişilik futbol takımı oyuncuları ile altı kişilik voleybol takımı oyuncuları toplansa, bu toplantıda en az kaç kişi, en çok kaç kişi bulunabilir? Voleybol oynayan altı kişinin tümü futbol takımında da oynuyorsa toplantıda onbir kişi bulunur. Eğer, voleybol oynayanlardan hiçbirisi futbol takımında değilse o zaman toplantıya tam onyedi kişinin katılacağını kolayca söyleyebilirsiniz. Voleybolculardan yalnız birisi futbol oynuyorsa toplantıya kaç kişi katılır? Ya iki voleybolcu futbol oynuyorsa kaç kişi katılır? Benzer yolla düşünerek tüm olasılıklarda toplantıya katılacak öğrenci sayısını saptayınız. Sonuç olarak bu toplantıya en az onbir, en çok da onyedi öğrencinin katılacağını söyleyeceksiniz.

2–14. Örnek

$A=\{a, c, d\}$, $B=\{b, c, d, e\}$ kümeleri veriliyor. Hem A nın hem de B nin elemanlarından oluşan küme C olduğuna göre C kümesini yazınız.

Çözüm : $C=\{a, b, c, d, e\}$ dir. Kümede bir elemanın yalnız bir kez yazıldığını unutmayınız. A ile B nin elemanlarından oluşan bu C kümesine A ile B nin birleşim kümesi diyeceğiz.

2–4. Tanım

A ve B herhangi iki küme olsun. Bu iki kümenin birleşimi AUB biçiminde gösterilir ve bu küme,

$$AUB=\{x \mid x \in A \text{ veya } x \in B\}$$

dir.

Bu tanıma göre AUB kümesi, A ile B nin tüm elemanlarından oluşmaktadır.

2–15. Örnek

$$A=\{c, e, k, m, z\}, \qquad B=\{a, b, c, z\}$$

kümeleri veriliyor. AUB ve BUA kümelerini yazınız.

Çözüm : 2–4. Tanım gereğince,

$$AUB=\{x \mid x\in A \text{ veya } x\in B\}$$

ve,

$$BUA=\{x \mid x\in B \text{ veya } x\in A\}$$

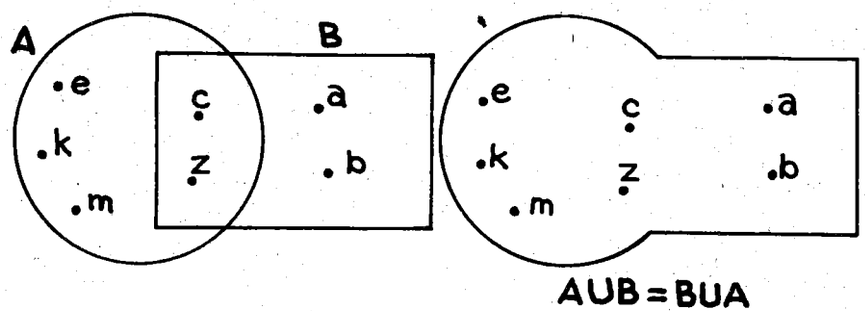
dır. Buna göre,

$$AUB=\{a, b, c, e, k, m, z\}$$

$$BUA=\{a, b, c, e, k, m, z\}$$

bulunur. Ne görüyorsunuz? AUB=BUA dır, değil mi?

(2–10. Şekil)'i inceleyiniz.

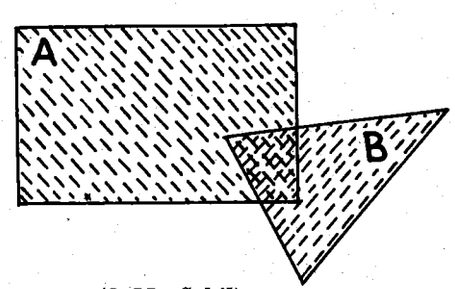


(2–10. Şekil)

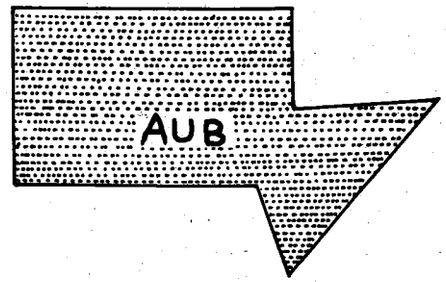
Siz de, herhangi iki A ve B kümesi alarak AUB=BUA olduğunu görünüz. Bu özeliğe, birleşim işleminin değişme özeliği denir.

2–16. Örnek

(2–11. Şekil) de, dikdörtgen ile içinden oluşan küme A, üçgen ile içinden oluşan küme de B dir. AUB kümesini çiziniz.



(2–11. Şekil)



(2–12. Şekil)

Çözüm : (2–12. Şekil) i inceleyiniz.

Her A ve B kümeleri için, AUB=BUA olduğunun ispatını şöyle yapabiliriz.

$\forall x\in AUB \Leftrightarrow (x\in A \text{ veya } x\in B)$, (2–4. Tanım)

$\Leftrightarrow (x\in B \text{ veya } x\in A)$, ($\vee$ nın değişme özeliği)

$\Leftrightarrow x\in BUA$, (2–4. Tanım)

dır. Aynı elemanlardan oluştukları için, AUB=BUA dır.

2–17. Örnek

A={1, 2, 3} ve AUB={1, 2, 4} olduğuna göre, B kümesini kaç değişik biçimde yazabiliriz.

Çözüm : $4\in AUB$ ve $4\in A$ olduğuna göre, $4\in B$ olmalıdır. Ayrıca, B kümesinde, A nın elemanlarının bulunmasının bir sakıncası da yoktur. Neden? Buna göre, {4}, {1, 4}, {2, 4}, {3, 4}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4} kümelerinden herhangi biri B kümesi olarak alınabilir.

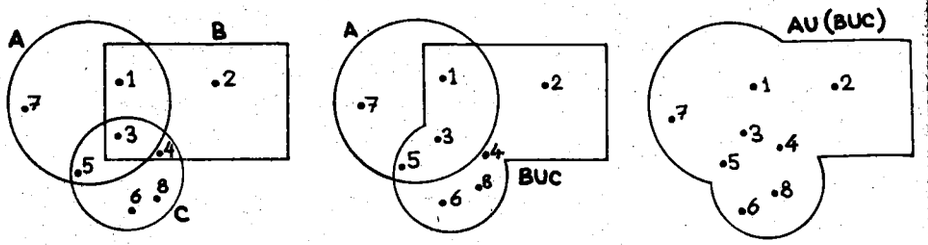
Şimdi de, A={a, b, c} kümesini ele alalım. AUA ve AUØ kümelerini yazalım. Ne görüyorsunuz? AUA=A ve AUØ=A dır, değil mi? Bu özeliklerin her A kümesi için doğru olduğunu nasıl açıklarsınız? AUA kümesinde A nın elemanlarından başka eleman bulunabilir mi? Bir kümede bir elemanın yalnız bir kez yazıldığını da hatırlayınız. Ø nin hiç elemanı olmadığı için, AUØ kümesi de yalnız A nın elemanlarından oluşur, diyebilirsiniz.

$$A=\{1, 3, 5, 7\}, \qquad B=\{1, 2, 3, 4\},$$

C={3, 4, 5, 6, 8} kümeleri veriliyor. AU (BUC) kümesini yazmak isteyelim. Bunun için önce, BUC={1, 2, 3, 4, 5, 6, 8}kümesini buluruz. Sonra da istenilen küme,

AU (BUC)={1, 3, 5, 7}U {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8}={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

biçiminde bulunur. (2–13. Şekil) i inceleyiniz.



(2–13. Şekil)

Siz de bu A, B, C kümeleri için (AUB) UC kümesini önce AUB yi bulduktan sonra yazınız ve (2–13. Şekil) dekine benzer bir Venn şeması da çiziniz. Şimdi, AU (BUC)=(AUB) UC diyebilir misiniz? Bu özeliğin adına, birleşim işleminin birleşme özeliği denir.

Şimdi, her A, B, C kümeleri için,

$$AU(BUC)=(AUB)UC$$

olduğunun ispatını verelim.

$x \in AU(BUC) \iff (x \in A \vee x \in (BUC))$, (2–4. Tanım)

$\iff (x \in A \vee (x \in B \vee x \in C))$, (2–4. Tanım)

$\iff ((x \in A \vee x \in B) \vee x \in C)$, ($\vee$ nın birleşme özeliği)

$\iff (x \in (AUB) \vee X \in C)$, (2–4. Tanım)

$\iff x \in (AUB)\ UC$, (2–4. Tanım)

dir. Aynı elemanlardan oluştukları için,

$$AU(BUC)=(AUB)UC$$

dir. (Bu özelikten dolayı, AU(BUC)=(AUB)UC=AUBUC yazılabilir)

2–4. Alıştırmalar

1) C={1, 4, 6, 8, 12}, D={1, 2, 3, 4}, E={4, 5, 6}

kümeleri veriliyor. Aşağıdaki kümeleri yazınız.

a) CUD b) DUC c) EUC d) DUE

2) AUB={a, b, c, d, e, f, g} ve B={a, c, e, f, g} olduğuna göre A kümesi olarak alınabilecek en az beş tane küme yazınız. Bu kümelerin hepsinde de bulunması gereken elemanların adlarını söyleyiniz.

3) $A \subset B$ olduğuna göre aşağıdaki önermelerden hangisi daima doğrudur?

a) AUB=A b) AUB=B c) AUB=Ø

4) Öyle üç tane A, B, C kümeleri yazınız ki, AUB=AUC olduğu halde, $B \neq C$ olsun.

5) A={x | x tamsayı ve $-5<x<7$}

B={x | x tamsayı ve $-6<x<5$}

kümeleri veriliyor. AUB kümesini ortak özelik yöntemi ile yazınız.

6) Aşağıdaki kümeleri en kısa biçimde yazınız.

a) ØUØ b) (AUØ)UB c) (AUB)U(ØUA)

7) AUB=Ø $\iff$ (A=Ø ve B=Ø) önermesinin doğru olduğunu ispat ediniz.

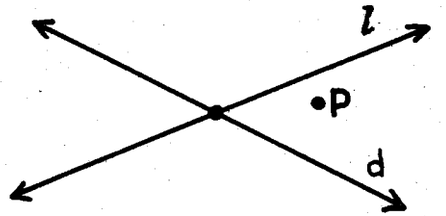
8) Öyle, A, B, C kümeleri yazınız ki,

$AUC \subset AUB$ olduğu halde, $C \not\subset B$ olsun.

9) s (A)=8, s(B)=5, s(C)=4 olmak üzere öyle A, B, C kümelcri yazınız ki, s[AU(BUC)]=9 olsun. Yazdığınız kümeleri Venn şeması ile gösteriniz.

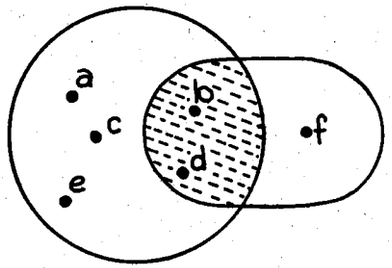
10) $s(AUB) \leqslant s(A)+s(B)$ olduğunu örnekler vererek gösteriniz. s(AUB)=s(A)+s(B) olması için A ile B kümeleri hangi şartı gerçeklemelidir.

11) (2–14. Şekil) de *l* doğrusu ile *l* ye göre P noktasının bulunduğu yarı düzlemin oluşturduğu küme A, d ye göre P noktasının bulunduğu yazı düzlemin oluşturduğu küme de B olsun. AUB kümesini boyayınız.



(2–14. Şekil)

2–5. Kümelerin Kesişimi



(2–15. Şekil)

Yukarıdaki şekilde gördüğünüz A ve B kümelerinin her ikisinin de elemanlarından oluşan kümeye C diyelim. C={b , d} dir. Neden? Bu C kümesine A ile B kümelerinin kesişim kümesi ya da arakesiti diyeceğiz.

2–5. Tanım

A ile B herhangi iki küme olsun. Bu iki kümenin arakesit (kesişim) kümesi A∩B biçiminde gösterilir ve bu küme,

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ve } x \in B\}$$

dir.

Bu tanıma göre, A∩B kümesi, A ile B nin ortak elemanlarından oluşmaktadır. Eğer A ile B kümelerinin hiç ortak elemanı yoksa, A∩B kümesi, boş küme olacaktır. Böyle iki kümeye **ayrık** iki küme denir.

2–18. Örnek

A={1, 3, 5 ,7, 8, 9}, B={4, 5, 6, 7, 8}, C={9, 10}

kümeleri veriliyor. A∩B, A∩C, B∩C kümelerini yazınız.

Çözüm : 2–5. Tanım gereğince,

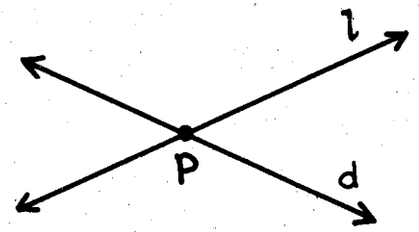
A∩B={5, 7, 8}, A∩C={9} ve B∩C=Ø dir.

B ile C nin hiç bir ortak elemanı olmadığına dikkat ediniz. O halde, B ile C ayrık iki kümedir.

2–19. Örnek

(2–16. Şekil) e göre, $l \cap d$ kümesini yazınız.

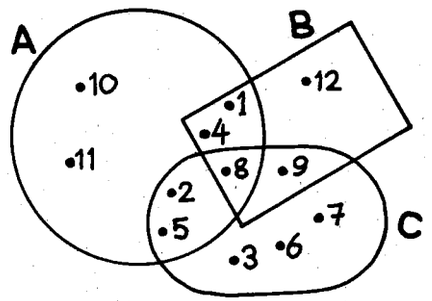
Çözüm : $l \cap d = \{P\}$ dir.



(2–16. Şekil)

2–20. Örnek

(2–17. Şekil) e bakarak, A∩B, B∩A, A∩C, C∩A ve B∩C ile C∩B kümelerini yazınız.



(2–17. Şekil)

Çözüm : A∩B={1, 4, 8}, B∩A={1, 4, 8}, A∩C={2, 5, 8}
C∩A={2, 5, 8}, B∩C={8, 9} ve C∩B={8, 9} olarak bulunur.

Herhangi iki A ve B kümeleri için, A∩B=B∩A olduğunu kolayca söyleyebilirsiniz. Şu halde, kümeler üzerindeki kesişim işleminin değişme özeliği vardır. Bu özeliğin ispatını yapalım.

$\forall x \in A \cap B \iff X \in A \wedge x \in B$, (2–5. Tanım)

$\iff x \in B \wedge x \in A$, ($\wedge$ nin değişme özeliği)

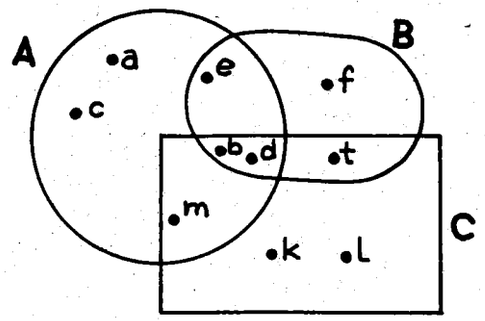
$\iff x \in B \cap A$ (2–5. Tanım)

Şu halde,

$$A \cap B = B \cap A$$

dır.

A={1, 2, 3} kümesini ele alalım ve A∩A ve A∩Ø kümelerini yazalım. A kümesinin kendisi ile ortak elemanlarından oluşan küme, {1, 2, 3} dir. O halde, A∩A=A dır. Ø nin hiç bir elemanı olmadığı için A ile ortak elemanı da yoktur. Yani, A∩Ø=Ø dir. Bu özeliklerin her A kümesi için doğru olacağını görünüz. Şimdi de, A={a, b, c, d, e, m} B={b, d, e, f, t} C={b, d, k, l, t, m} kümelerini alalım ve A∩ (B∩C) kümesini yazalım. (2–18. Şekil) e bakınız.



(2–18. Şekil)

Önce, B∩C={b, d, t} kümesini bulunuz. Sonra da, bunun A ile kesişimi olan kümeyi,

$$A \cap (B \cap C) = \{b, d\}$$

biçiminde buluruz.

Siz de, bu kümeler için, (A∩B)∩C kümesini yazınız. Ne görüyorsunuz?

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

dir, değil mi? Şimdi bu özeliğin her A, B, C kümeleri için doğru olduğunu kanıtlayalım. (Bu özeliğe, kesişim işleminin birleşme özeliği denir.)

$\forall x \in A \cap (B \cap C) \iff x \in A \wedge x \in (B \cap C)$, (2–5. Tanım)

$\iff x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C)$, (2–5. Tanım)

$\iff (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C$, ($\wedge$ nin birleşme özeliği)

$\iff x \in (A \cap B) \wedge x \in C$ (2–5. Tanım)

$\iff x \in (A \cap B) \cap C$ (2–5. Tanım)

dir. Şu halde,

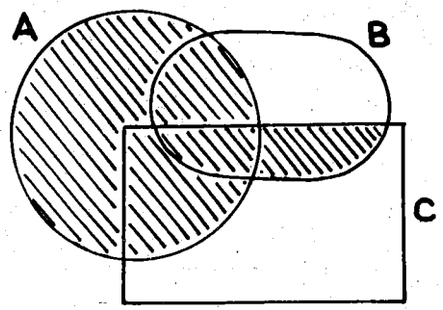
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

dir. Bu özelikten dolayı, A∩(B∩C)=(A∩B)∩C=A∩B∩C yazılabilir.

Buraya kadar kümeler üzerinde verilen kesişim ve birleşim işlemlerini öğrendik. Şimdi de, herhangi A, B, C kümeleri için,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

olduğunu gösterelim. (2–19. Şekil) i inceleyiniz.



(2–19. Şekil)

Yukarıdaki şekilde, taranarak gösterilen kümenin hem, A∪(B∩C) kümesini, hem de (A∪B)∩(A∪C) kümesini gösterdiğine dikkat ediniz. Şu halde, ∪ işleminin, ∩ işlemi üzerine dağılma özeliği vardır, diyebiliriz.

Siz de, benzer biçimde bir Venn Şeması çizerek, A∩(B∪C)= (A∩B)∪(A∩C) olduğunu yani, kümelerde kesişim işleminin birleşim işlemi üzerine dağılma özeliği olduğunu gösteriniz.

2–5. Alıştırmalar

1) A={—2, —1, 0, 1, 2, 3}, B={—1, 1, 2, 3 ,5} C={3, 5, 7} olduğuna göre aşağıdaki kümeleri yazınız.

a) $A \cap B$ b) $B \cap C$ c) $A \cap (B \cap C)$

d) $(A \cap B) \cap C$ e) $A \cup (B \cap C)$ f) $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

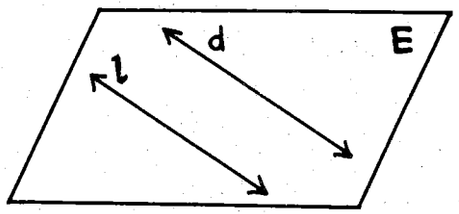
g) $A \cap (B \cup C)$ h) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$

2) $A \subset B$ ise $A \cap B = A$ olduğunu Venn şeması çizerek gösteriniz.

3) (2–20. Şekil) de, E düzlemi içindeki l ve d doğruları paraleldir. Buna göre, aşağıdaki önermelerin doğru ya da yanlış olduklarını söyleyiniz.

a) $l \subset E$ b) $d \not\subset E$ c) $l \cap d = \emptyset$

d) $l \cup E = E$ e) $d \cap E = E$ f) $l \cup d \cup E = E$



(2–20. Şekil)

4) Öyle A, B, C kümeleri yazınız ki, $A \cap B = A \cap C$ olduğu halde, $B \neq C$ olsun.

5) $A = \{x \mid x \text{ tamsayı ve } -3 < x \leqslant 4\}$

$B = \{x \mid x \text{ tamsayı ve } -1 < x \leqslant 6\}$ veriliyor.

$A \cup B$ kümesini ortak özelik yöntemi ile yazınız.

6) A ve B, elemanları sonlu çoklukta (eleman sayıları doğal sayı olan) iki küme olsun. Venn şeması çizerek, $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ olduğunu açıklayınız.

7) $s(A) = 12$, $s(B) = 9$ ve $s(A \cap B) = 4$ olduğuna göre, $s(A \cup B)$ yi hesaplayınız.

8) 32 kişilik bir sınıftaki her öğrencinin ingilizce ya da almanca dillerinden en az birini bildiği varsayılıyor. İngilizce bilenlerin sayısı 20, Almanca bilenlerin sayısı da 17 olduğuna göre bu sınıfta kaç öğrencinin her iki dili de bildiğini hesaplayınız.

9) Elemanları sonlu çoklukta olan A, B, C kümeleri için,

$s(A \cup B \cup C) = s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C)$

olduğunu Venn şeması çizerek açıklayınız.

10) İngilizce, Fransızca ve Almanca dillerinden en az birini bilen bir uçakta bulunan yolcuların 6'sı İngilizce ve Fransızca, 5'i Fransızca ve Almanca, 8'i İngilizce ve Almanca, 4'ü ise her üç dili de biliyor. Ayrıca, uçaktaki tüm yolcuların 21'i İngilizce, 24'ü Almanca ve 17'si Fransızca bildiğine göre uçaktaki yolcu sayısını hesaplayınız.

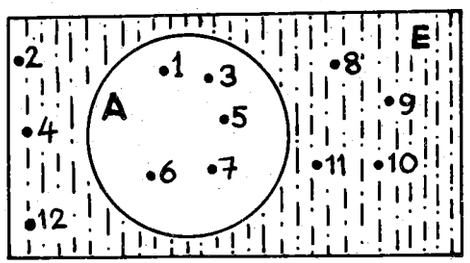
2–6. Tümleme

$A = \{1, 3, 5, 6, 7\}$ kümesini ele alalım. Bu kümeye ait olan elemanları kolayca söyleyebilirsiniz. Örneğin, $1 \in A$, $5 \in A$, $6 \in A$ dır. Sizden A kümesine ait olmayan elemanların oluşturduğu kümeyi yazmanız istense, hepiniz de aynı elemanlardan oluşan kümeyi yazabilir misiniz?

Söz gelimi $2 \notin A$, $8 \notin A$, kalem $\notin A$, silgi $\notin A$ dır. Ancak, A ya ait olmayan tüm elemanları söyleyebilmeniz olanaksızdır. Şimdi bir,

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

kümesini alalım ve yalnız E nin elemanlarından oluşan kümeleri düşünelim. $A \subset E$ dir, değil mi? (2–21. Şekil) e bakınız.



(2–21. Şekil)

Şimdi, A kümesine ait olmayan E nin elemanlarının oluşturduğu kümeyi kolayca yazabilirsiniz. Bu küme, $\{2, 4, 8, 9, 10, 11, 12\}$ kümesidir.

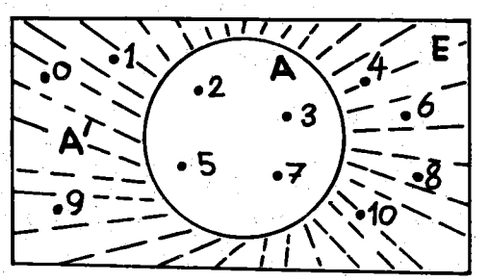
Kümelerle ilgili uygulamaları açıklığa kavuşturmak için, önceden, evrensel küme denilen ve yeteri kadar elemanı olan bir E kümesini ele alır ve ancak E nin elemanlarından oluşan kümeleri düşünürüz. Böylece, yazdığımız her A kümesi E nin bir alt kümesi olur. Söz gelimi,

tamsayılar kümesini evrensel küme olarak aldığımızda artık hep tamsayılardan oluşan kümelerle ilgileniriz. Tamsayıların dışında hiç bir nesneyi eleman olarak almayız.

2–21. Örnek

E={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} evrensel kümesi ile A={2, 3, 5, 7} kümesi veriliyor. E kümesinin A ya ait olmayan elemanlarının kümesini yazınız.

Çözüm : (2–22. Şekil) e bakınız. E kümesinin A ya ait olmayan elemanlarının oluşturduğu küme, {0, 1, 4, 6, 8, 9, 10} dir. (Bu kümeye A nın tümleyeni diyeceğiz ve A′ ile göstereceğiz.)



(2–22. Şekil)

2–5. Tanım

E, evrensel kümesi içinde bir A kümesi verilsin. E nin A ya ait olmayan elemanlarının oluşturduğu kümeye A nın **tümleyeni** denir ve bu küme A′ ile gösterilir.

Bu tanıma göre,

$$A' = \{x \mid x \in E \text{ ve } x \notin A\}$$

kümesidir.

2–22. Örnek

Sınıfınızdaki öğrencilerin kümesini evrensel küme olarak alalım. Sınıfınızdaki numarası tek sayı olan öğrencilerin kümesi A olduğuna göre A′ kümesini ve A∪A′ kümesini söyleyiniz.

Çözüm : A′ kümesi, sınıfınızda numarası tek olmayan yani numarası çift olan öğrencilerin kümesidir. A∪A′ kümesini de siz söyleyiniz.

Evrensel kümeyi istediğimiz biçimde seçebiliriz. Söz gelimi, düzlemsel nokta kümelerini inceliyorsak, evrensel küme olarak düzlemi seçeriz. Konumuz katı cisimlerin hacımları ise bu sefer uzayı (üç boyutlu uzayı) evrensel küme olarak seçeriz. Evrensel küme belirlendikten sonra onun dışında eleman düşünülmez. Bundan böyle, E kümesi dediğimizde onun evrensel küme olduğu anlaşılmalıdır.

2–23. Örnek

E, evrensel küme ve A herhangi bir küme olduğuna göre, aşağıdaki önermelerin doğru ya da yanlış olduklarını söyleyiniz.

a) $A \cap A' = \emptyset$ b) $A \cup A' = E$ c) $E \subset A$

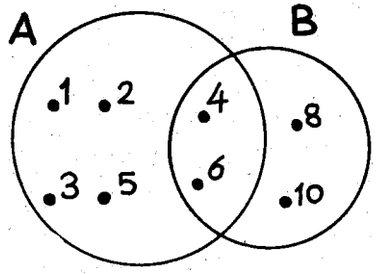
d) $A' \not\subset E$ e) $E' = \emptyset$ f) $\emptyset = E$

Çözüm : a) Doğru b) Doğru c) Yanlış
d) Yanlış e) Doğru f) Doğru

2–7. İki Kümenin Farkı

A={1, 2, 3, 4, 5, 6}, B={4, 6, 8, 10}

kümeleri verilsin. Elemanlarının tümü A da olan fakat B de olmayan kümeyi yazalım.



(2–23. Şekil)

Bu küme, {1, 2, 3, 5} kümesidir, değil mi? Şimdi de, elemanlarının tümü B de olan fakat A da olmayan kümeyi yazalım. Bu küme de {8, 10} kümesidir. Bu yazdığımız kümelerden birincisine A dan B nin farkı, ikincisine de B den A nın farkı diyeceğiz.

2–6. Tanım

A ve B iki küme olsun. A dan B nin farkı olan küme $A \setminus B$ biçiminde gösterilir ve

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ ve } x \notin B\}$$

dir.

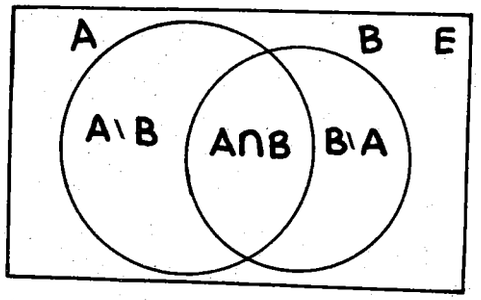
Bu tanıma göre, (2–23. Şekil) deki A ve B kümeleri için, $A \setminus B = \{1, 2, 3, 5\}$ ve $B \setminus A = \{8, 10\}$ dur.

$$x \notin B \equiv x \in B'$$

olduğundan $A \setminus B$ kümesini,

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ ve } x \in B'\}$$

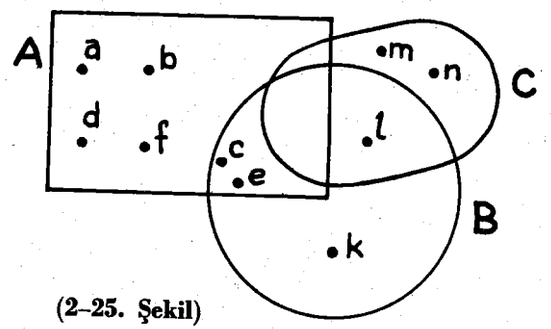
biçiminde de yazabiliriz. (2–24. Şekil) de $A \setminus B$ ve $B \setminus A$ kümelerini görüyorsunuz.



(2–24. Şekil)

2–24. Örnek

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{c, e, k, l\}$ ve $C = \{l, m, n\}$ kümeleri veriliyor. $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \setminus C$ ve $C \setminus B$ kümelerini elemanları ile yazalım.



(2–25. Şekil)

Yukarıdaki şekli inceleyiniz. 2–6. Tanıma göre, $A \setminus B = \{a, b, d, f\}$, $B \setminus A = \{k, l\}$ $A \setminus C = \{a, b, c, d, e, f\} = A$ ve $C \setminus B = \{m, n\}$ olduğunu kolayca bulabilirsiniz.

Bu örnekte, $A \cap C = \emptyset$ olduğundan $A \setminus C = A$ olduğuna dikkat ediniz. Burada, $C \setminus A = C$ olduğunu da söyleyebilirsiniz.

Kümeler üzerinde fark alma işleminin bazı özelikleri aşağıda verilmiştir. Bir E evrensel kümesi ve onun içinde A, B, C kümeleri seçerek aşağıdaki özelikleri gerçekleyiniz.

a) $A \setminus A = \emptyset$

b) $A \setminus \emptyset = A$

c) $\emptyset \setminus A = \emptyset$

d) $A \setminus B = A \cap B'$

e) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

f) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

g) $(A \setminus B)' = A' \cup B$

2–7. Alıştırmalar

1) Türkçedeki harflerin kümesine E diyelim. A kümesi sesli harflerin kümesi ise A′ kümesini söyleyiniz.

2) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ ve $A' = \{1, 3, 6, 7, 10\}$, $B = \{3, 6, 7, 11\}$ olduğuna göre, bu duruma uygun bir Venn şeması çiziniz. $A' \cup B'$, $(A \cap B)'$, $(A \cup B)'$ ve $A' \cap B'$ kümelerini yazınız.

3) Venn şeması çizerek, $(A \cup B)' = A' \cap B'$ olduğunu gösteriniz.

4) Venn şeması çizerek, $(A \cap B)' = A' \cup B'$ olduğunu gösteriniz.

5) $A \subset B$ olduğuna göre aşağıdaki önermelerden hangisinin doğru olduğunu söyleyiniz.

a) $A' \subset B'$ b) $B' \subset A$

6) $A = B \cap C$ olduğuna göre, A′, B′, C′ kümeleri arasında bir eşitlik yazınız.

7) Üçüncü ve dördüncü araştırmalardan yararlanarak $[A \cup (B \cap C]'$ kümesini A′, B′, C′ kümeleri ile yazınız.

8) Evrensel küme, $E = \{x | 0 \leqslant 15 \text{ ve } x \text{ tamsayı}\}$ olmak üzere,

$A = \{3, 5, 8, 9, 11, 13, 14\}$ ve $B' = \{0, 1, 3, 4, 5, 10, 12, 15\}$

kümeleri veriliyor. Buna göre, $(A \cup B)'$, $(A \cap B)'$ ve $A' \setminus B$ kümelerini elemanları ile yazınız.

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ ve } x \notin B\}$$

dir.

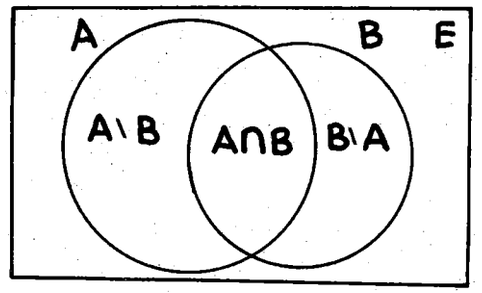
Bu tanıma göre, (2–23. Şekil) deki A ve B kümeleri için, $A \setminus B = \{1, 2, 3, 5\}$ ve $B \setminus A = \{8, 10\}$ dur.

$$x \notin B \equiv x \in B'$$

olduğundan $A \setminus B$ kümesini,

$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ ve } x \in B'\}$$

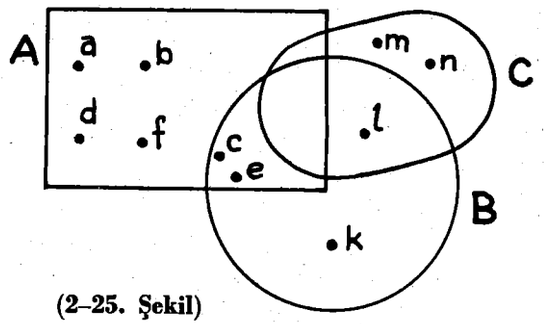
biçiminde de yazabiliriz. (2–24. Şekil) de $A \setminus B$ ve $B \setminus A$ kümelerini görüyorsunuz.



(2–24. Şekil)

2–24. Örnek

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{c, e, k, l\}$ ve $C = \{l, m, n\}$ kümeleri veriliyor. $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \setminus C$ ve $C \setminus B$ kümelerini elemanları ile yazalım.



(2–25. Şekil)

Yukarıdaki şekli inceleyiniz. 2–6. Tanıma göre, $A \setminus B = \{a, b, d, f\}$, $B \setminus A = \{k, l\}$ $A \setminus C = \{a, b, c, d, e, f\} = A$ ve $C \setminus B = \{m, n\}$ olduğunu kolayca bulabilirsiniz.

Bu örnekte, $A \cap C = \emptyset$ olduğundan $A \setminus C = A$ olduğuna dikkat ediniz. Burada, $C \setminus A = C$ olduğunu da söyleyebilirsiniz.

Kümeler üzerinde fark alma işleminin bazı özelikleri aşağıda verilmiştir. Bir E evrensel kümesi ve onun içinde A, B, C kümeleri seçerek aşağıdaki özelikleri gerçekleyiniz.

a) $A \setminus A = \emptyset$

b) $A \setminus \emptyset = A$

c) $\emptyset \setminus A = \emptyset$

d) $A \setminus B = A \cap B'$

e) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$

f) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

g) $(A \setminus B)' = A' \cup B$

2–7. Alıştırmalar

1) Türkçedeki harflerin kümesine E diyelim. A kümesi sesli harflerin kümesi ise A′ kümesini söyleyiniz.

2) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ ve $A' = \{1, 3, 6, 7, 10\}$, $B = \{3, 6, 7, 11\}$ olduğuna göre, bu duruma uygun bir Venn şeması çiziniz. $A' \cup B'$, $(A \cap B)'$, $(A \cup B)'$ ve $A' \cap B'$ kümelerini yazınız.

3) Venn şeması çizerek, $(A \cup B)' = A' \cap B'$ olduğunu gösteriniz.

4) Venn şeması çizerek, $(A \cap B)' = A' \cup B'$ olduğunu gösteriniz.

5) $A \subset B$ olduğuna göre aşağıdaki önermelerden hangisinin doğru olduğunu söyleyiniz.

a) $A' \subset B'$ b) $B' \subset A$

6) $A = B \cap C$ olduğuna göre, A′, B′, C′ kümeleri arasında bir eşitlik yazınız.

7) Üçüncü ve dördüncü araştırmalardan yararlanarak $[A \cup (B \cap C]'$ kümesini A′, B′, C′ kümeleri ile yazınız.

8) Evrensel küme, $E = \{x | 0 \leqslant 15 \text{ ve } x \text{ tamsayı}\}$ olmak üzere,

$A = \{3, 5, 8, 9, 11, 13, 14\}$ ve $B' = \{0, 1, 3, 4, 5, 10, 12, 15\}$

kümeleri veriliyor. Buna göre, $(A \cup B)'$, $(A \cap B)'$ ve $A' \setminus B$ kümelerini elemanları ile yazınız.

İKİNCİ BÖLÜMLE İLGİLİ TESTLER

1. A={Ø} kümesi veriliyor. Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) s(A)=0 b) s(A)=1 c) s(A)=—1
d) s(A)=2 e) Hiçbiri

2. A={x|x haftanın günü} kümesinin kaç tane öz alt kümesi vardır?

a) 7 b) 27 c) 47 d) 107 e) 127

3. A ve B kümeleri için, s(A)=12, s(B)=9, s(A∩B)=5 olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi s(A∪B) ye eşittir?

a) 15 b) 14 c) 13 d) 16 e) Hiçbiri

4. A, B, C birer kümeyi gösterdiğine göre, aşağıdaki eşitliklerden hangisi yanlıştır?

a) A∪(B∪C)=(B∪A)∪C
b) A∩(B∩C)=C∩(A∩B)
c) A∪Ø=A∩Ø
d) B∪(C∩A)=(B∪C)∩(B∪A)
e) C∩(A∪B)=(B∩C)∪(C∩A)

5. Aşağıdakilerden hangisi, "Matematik" sözcüğünü oluşturan harflerin kümesidir?

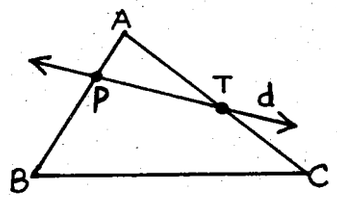
a) {a, t, e, m, i}, b) {a, t, e, m, i, k}, c) {M, a, t, e, m, a, t, i, k},
d) {t, M, i, a, k, e, m}, e) Hiçbiri

6. A ve B kümeleri için s(A∩B)=s(B) olduğuna göre aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur?

a) s(A)<s(B) b) s(A)=s(B) c) A⊂B
d) B⊂A e) Hiçbiri

7. (2–26. Şekil) e göre d∩ABC kümesi aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) {P} b) {T} c) Ø d) {A, B, C, P, T} e) {P, T}



(2–26. Şekil)

8. Bir A kümesinin 63 tane öz alt kümesi olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi s(A) ya eşittir?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

9. A, B kümeleri için, s(A∪B)=18, s(A)=10, s(B)=13 olduğuna göre aşağıdakilerden hangisi s(A∩B) ye eşittir?

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2 e) 1

10. A ve B kümeleri için s(A∪B)—s(A)=s(B) olduğuna göre, aşağıdaki önermelerden hangisi doğrudur.

a) A∩B=Ø b) A⊂B c) B⊂A
d) A=B e) s(A)<s(B)

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

BAĞINTI – FONKSİYON – İŞLEM

Bu bölümde, iki kümenin kartezyen çarpımını ve buna dayalı olarak bağıntıyı tanıyacak ve özel bir bağıntı olan fonksiyon ile işlemi göreceksiniz. Bunlar matematiğin çok önemli kavramlarıdır.

3–1. Kartezyen Çarpım

İki kümenin birleşimi, kesişimi ve farkını almayı biliyorsunuz. Şimdi de iki kümenin kartezyen çarpımının nasıl yapılacağını göreceğiz. Bunun için önce, bir sıralı ikilinin ne olduğunu öğrenelim.

Sıralı İkili

Her ilin bir trafik numarası olduğunu biliyorsunuz. İl ismi ile onun trafik numarasını, aralarına virgül koyarak, bir parantez içine yazalım. Söz gelimi (Konya, 42) ikilisi böyle elde edilmiştir. Sizde, bir parantez içine, aralarına virgül koyarak isim ve soyadınızı yazarak bir ikili elde ediniz.

Öğretmeniniz sizden, bir parantez içerisine aralarına virgül koyarak, önce okul numaranızı, sonra da yaşınızı yazmanızı istesin. Bir arkadaşınızın (143, 15) ikilisini yazdığını varsayalım. Bundan ne anlarsınız? Arkadaşınızın okul numarasının 143, yaşının ise 15 olduğunu değil mi? Eğer arkadaşınız yanlışlıkla bu ikiliyi (15, 143) biçiminde yazsaydı bunun anlamı ne olurdu? Okul numarasının 15, yaşının ise 143 olduğu değil mi? Şu halde, böyle bir ikilide elemanların yazılış sırası önemli olmaktadır. Şimdi ikiliyi tanıyalım.

3–1. Tanım

Herhangi iki x ve y elemanını (x, y) biçiminde yazarak elde edilen (x, y) elemanına **sıralı ikili** veya kısaca, **ikili** denir. x'e bu sıralı ikilinin birinci bileşeni, y'ye de ikinci bileşeni denir.

Bu tanıma göre, örneğin, (a, b), (3, 5), (—2, 4) birer sıralı ikilidir. Bir sıralı ikiliyi oluşturan elemanların yazılış sırası önemlidir. İki sıralı ikilinin eşitliğini aşağıdaki tanımla veriyoruz.

3–2. Tanım

(x, y) ve (u, v) gibi iki sıralı ikilinin eşit olması için gerek ve yeter koşul x=u ve y=v olmasıdır. Yani,

$$(x, y)=(u, v) \iff x=u \text{ ve } y=v$$

dir. Bu tanıma göre, $(2, 8)\neq(8, 2)$ dir.

3–1. Örnek

(x, 2y)=(3, 10) olduğuna göre x ve y nin değerini bulunuz.

Çözüm : $(x, 2y)=(3, 10) \iff x=3 \text{ ve } 2y=10$

$\iff x=3 \text{ ve } y=5$ dir.

İki Kümenin Kartezyen Çarpımı

A={1, 2, 3}, B={a, b} olsun. Birinci bileşeni A nın elemanı, ikinci bileşeni B nin elemanı olan ikililerin kümesini yazalım. Bu küme, {(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)} biçimindedir. Bu kümeye A ile B nin kartezyen çarpımı diyeceğiz.

3–3. Tanım

A ve B herhangi iki küme olsun. Birinci bileşeni A nın, ikinci bileşeni B nin elemanı olan ikililerin oluşturduğu, $\{(x, y)|x\in A \text{ ve } y\in B\}$ kümesine A ile B nin **kartezyen çarpımı** denir ve bu küme A x B biçiminde yazılır.

Kartezyen sözcüğü, ünlü Fransız matematikçisi R. Decartes (Dekart)'ın (1596 – 1650) adından gelmektedir. Decartes, kümelerin çarpımını kullanarak, geometriyi cebir yoluyla kurmayı başarmıştır.

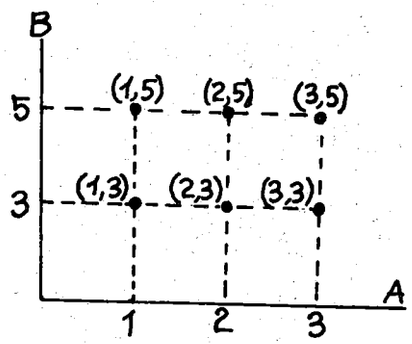
3–2. Örnek

A={1, 2, 3}, B={3, 5} kümeleri veriliyor. AxB ve BxA kümelerini yazınız.

Çözüm : 3–3. Tanım gereğince,

$A\times B=\{(x, y)|x\in A \text{ ve } y\in B\}$ dir. Şu halde,

AxB {(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5)} dir. Bu kümeyi, (3–1. Şekil) de gördüğünüz şema ile de belirtebiliriz. Bu şekli inceleyiniz.

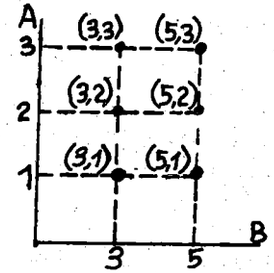


(3–1. Şekil)

Şimdi de, BxA kümesini yazalım. 3–3. Tanım gereğince,

BxA = { (x, y)|x∈B ve y∈A} dır. Şu halde,

BxA = { (3, 1), (3, 2), (3, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3) } dir. Bu kümeyi de şema ile gösterelim.

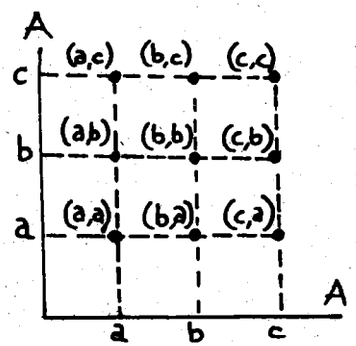


(3–2. Şekil)

Bu kümeler için, AxB≠BxA olduğuna dikkat ediniz. O halde, kartezyen çarpımın değişme özeliği yoktur, diyebiliriz.

3–3. Örnek

A = {a, b, c} olduğuna göre AxA kümesini şema ile gösteriniz ve bu kümeyi yazınız.



(3–3. Şekil)

Çözüm :

Yukardaki şemayı inceleyiniz. Şu halde,

AxA = { (a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c) } dir. Siz de herhangi iki A ve B kümesi alarak, AxB, BxA, AxA ve BxB kümelerini, uygun birer şema çizdikten sonra yazınız. Eğer, s(A)=n, s(B)=m ise s(AxB)=n.m diyebilir misiniz? (s(AxB)=s(BxA) mıdır?

3–1. Alıştırmalar

1. x, alfabemizdeki sesli harf ve y de bu sesli harfden sonra gelen ilk harf olmak üzere kaç tane (x, y) ikilisi yazabilirsiniz? Hepsini yazınız.

2. (2p, 4+k)=(6, 7) olduğuna göre p ve k sayılarını bulunuz.

3. A={—2, 0, 4}, B={c, e, b, t} kümeleri veriliyor. Uygun birer şema çizerek, AxB ve BxA kümelerini yazınız.

4. A={x|x tamsayı ve —1<x<4}, B={x|x tamsayı ve 2<x<7} kümeleri veriliyor. s(AxB) ve s(BxA) yı söyleyiniz.

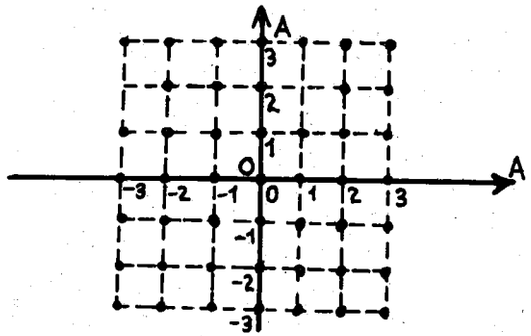
5. A={1, 2, 3} olsun. AxØ kümesini söyleyiniz.

6. A={1, 3, 5, 6}, B={2, 4}, C={1, 2, 3} kümeleri veriliyor. Ax(B∪C) ve (AxB)∪(AxC) kümelerini yazınız. Ne görüyorsunuz?

7. Altıncı alıştırmada verilen A, B, C, kümeleri için, Ax(B∩C) ve (AxB) ∩ (AxC) kümelerini yazınız. Bu kümeler eşit midir?

3–2. Analitik Düzlem ve Bir Noktanın Koordinatı

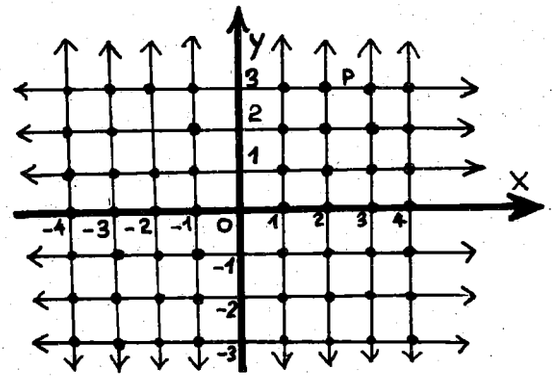
A={—3, —2, —1, 0, 1, 2, 3} kümesini alalım ve AxA'yı şema ile gösterelim. Bunun için, (3–4. Şekil) de gördüğünüz gibi, dik iki doğrunun kesim noktasına "0" sayısını eşleyip öteki sayıları da eşit aralıklarla yönü dikkate alarak bu doğrular üzerindeki birer noktaya eşleyelim.



(3–4. Şekil)

(3–4. Şekil) de AxA kümesinin elemanlarına karşı gelen noktaları görüyorsunuz. Yatay eksen üzerindeki noktalara karşı gelen AxA nın elemanları, (—3, 0), (—2, 0), (—1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0) ve (3, 0) dır. Düşey eksen üzerindeki noktalara karşı gelen elemanlar da, (0, —3), (0, —2), (0, —1), (0, 0,), (0, 1), (0, 2) ve (0, 3) tür. Neden? Öteki noktalara karşı gelen elemanları da siz söyleyiniz.

Şimdi de tamsayılar kümesinin kartezyen çarpımını şema ile gösterelim. Tamsayılar kümesine Z diyelim. ZxZ={(x, y)|x∈Z ve y∈Z} kümesi olduğunu biliyorsunuz. Birbirine dik olarak aldığımız doğruların kesim noktasına O diyelim ve bunlardan yatay olanına Ox–, düşey olanına Oy– ekseni diyelim. (3–5. Şekil) de her tamsayı ikilisine düzlemin bir ve yalnız bir noktasının karşılık geldiğini görüyorsunuz. Ox–ekseni üzerindeki ZxZ nin elemanlarının, x bir tamsayı olmak üzere (x, 0) biçiminde, Oy–ekseni üzerindeki ZxZ nin elemanlarının da y bir tamsayı olmak üzere (0, y) biçiminde olduğunu görünüz. (0, 0) ikilisi hangi noktaya karşılık gelmektedir?



(3–5. Şekil)

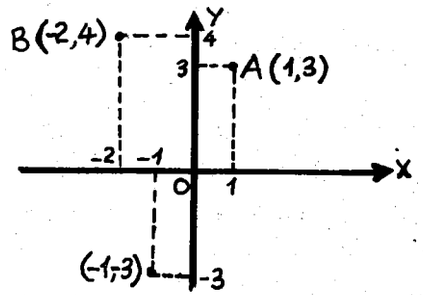
Düzlemin bazı noktalarına bir tamsayı ikilisinin karşılık gelmediğini kolayca söyleyebilirsiniz. Gelecek bölümlerde sayıları göreceksiniz. Tamsayılar kümesini genişleterek rasyonel sayıları ve daha sonra da rasyonel sayıları da içine alan reel sayıları elde edeceğiz. Reel sayılar, sayı eksenini dolduracakları için her reel sayı ikilisine düzlemin bir ve yalnız bir noktasının karşılık geleceğini ve düzlemin her noktasına da bir reel sayı ikilisinin karşılık geleceğini göreceksiniz. Bir noktaya karşılık gelen sayı ikilisine o noktanın **koordinatı** diyeceğiz. Örneğin, bir P noktasına karşılık gelen ikili (2, 3) ise bu ikili P noktasının koordinatıdır, (3–5. Şekil). Bir noktaya karşılık gelen (x, y) biçimindeki bir ikilide, birinci bileşen olan x sayısına o noktanın **apsisi,** ikinci bileşen olan y sayısına da o noktanın **ordinatı** denir. Buna göre yukarda adı geçen P(2, 3) noktasının apsisi 2, ordinatı 3 tür.

Birbirine dik olan eksenlerden yatay olan Ox–eksenine, birinci eksen ya da apsis ekseni, düşey olan Oy–eksenine, ikinci eksen ya da ordinat ekseni denir. Bu iki eksenin kesim noktası olan O noktası da başlangıç noktasıdır. Apsis ve ordinat eksenlerinden oluşan bu sisteme **koordinat sistemi** ve üzerine koordinat sistemi yerleştirilmiş düzleme de, **analitik düzlem** diyeceğiz.

3–4. Örnek

A(1, 3), B(—2, 4), C(—1, —3) noktalarını analitik düzlemde gösterelim.

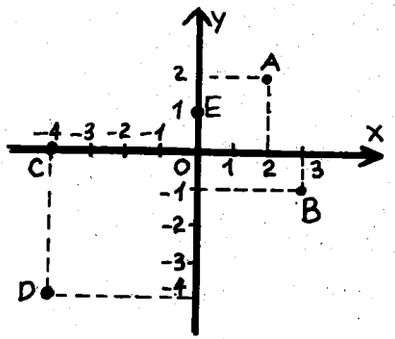
Çözüm : (3–6. Şekil) i inceleyiniz.



(3–6. Şekil)

3–5. Örnek

(3–7. Şekil) deki A, B, C, D, E, O noktalarına karşı gelen ikilileri söyleyiniz.



(3–7. Şekil)

Çözüm: A(2, 2), B(3, —1), C(—2, 0), D(—2, —3), E(0, 1) ve O(0, 0) dır.

3–2. Alıştırmalar

1. A(0, 2), B(—4, —1), C(3, —1), D(0, —2), E(—2, 0), F(6, 2) noktalarını analitik düzlemde gösteriniz.

2. Köşeleri, A(1, 3), B(—2, 1), C(4, —1) olan üçgeni, analitik düzlemde çiziniz.

3. A={—1, 0, 1} ve B={—2, 0, 1, 3} kümeleri veriliyor. AxB kümesinin elemanlarına karşı gelen noktaları analitik düzlemde gösteriniz.

4. Analitik düzlemde, apsisi 1 olan dört tane nokta işaretleyiniz.

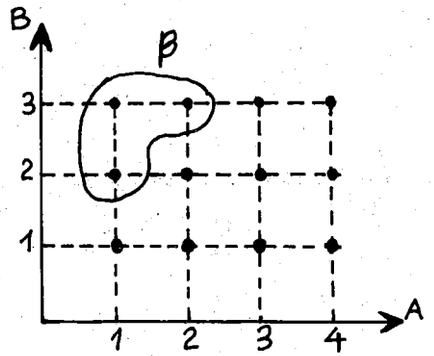
3–3. Bağıntı ve Özelikleri

A={Arı, Koyun, Bal, Süt} kümesi verilsin. AxA kümesinin on altı tane elemanı olduğunu kolayca söyleyebilirsiniz. AxA nın bir alt kümesi olan, { (Arı, Bal), (Koyun, Süt) } kümesini alalım. Bu kümenin elemanı olan ikililerin bileşenleri arasında nasıl bir ilişki görüyorsunuz? Arının bal, koyunun süt verdiğini söyleyebilirsiniz.

Şimdi de, A={1, 2, 3, 4} ve B={1, 2, 3} kümelerini ele alalım. (3–8. Şekil) de AxB kümesini ve onun bir alt kümesi olan,

$$\beta = \{ (1, 2), (1, 3), (2, 3) \}$$

kümesini görüyorsunuz.



(3–8. Şekil)

Siz de, AxB nin herhangi bir alt kümesini yazınız. Yazdığınız kümelerin her birine A'dan B'ye bir bağıntı diyeceğiz.

3–4. Tanım

A ve B herhangi iki küme olsun. AxB nin bir β alt kümesine A'dan B'ye bir **bağıntı** denir.

Bu tanıma göre, AxA nın bir β alt kümesi de A'dan A'ya bir bağıntıdır. A'dan A'ya bir bağıntıya kısaca A'da bir bağıntı da diyeceğiz.

β, A'dan B'ye veya A'da bir bağıntı olsun. $(x, y) \in \beta$ ise bunu, $y \beta x$ biçiminde de yazar ve "y elemanı, β bağıntısı ile x elemanına bağlıdır" diye okuruz.

3–6. Örnek

A={a, b, c), B={c, d} kümeleri veriliyor. Aşağıdaki kümelerden hangisi A'dan B'ye bir bağıntı değildir?

a) $\beta_1=\{(a, c), (c, c), (b, d)\}$

b) $\beta_2=\{(b, c), (c, b), (a, d), (a, c)\}$

c) $\beta_3=\{(a, b)\}$

d) $\beta_4=\{(c, c), (b, d)\}$

e) $\beta_5=\{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, c), (c, d)\}$

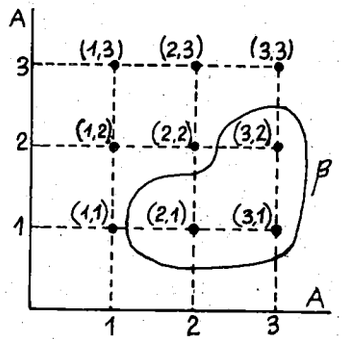
Çözüm: $b \notin B$ olduğu için, $(c,b) \notin AxB$ dir. Buna göre, $\beta_2 \not\subset AxB$ yani β_2, A'dan B'ye bir bağıntı değildir. (Öteki kümelerin hepsinin de AxB nin alt kümesi olduğunu görünüz.) AxB nin şemasını çizerek, bu bağıntı kümelerini (3–8. Şekil) deki gibi kapalı eğri ile belirtiniz.

3–7. Örnek

A={1, 2, 3} kümesi ve $\beta=\{(x, y)|(x, y)\in AxA$ ve $x>y\}$ kümesi veriliyor. β, A'da bir bağıntı mıdır? β yı elemanları ile yazınız. AxA nın şemasını çizerek β yı belirtiniz.

Çözüm : $\beta \subset AxA$ olduğu için β, A'da bir bağıntıdır. (3–9. Şekil) i inceleyiniz.

$\beta=\{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$ dir.



(3–9. Şekil)

Siz de, yukarıdaki şemadaki AxA kümesinin alt kümesi olan üç tane bağıntı kümesi yazınız.

Şimdi, A'dan A'ya verilen bağıntıların özeliklerini göreceğiz.

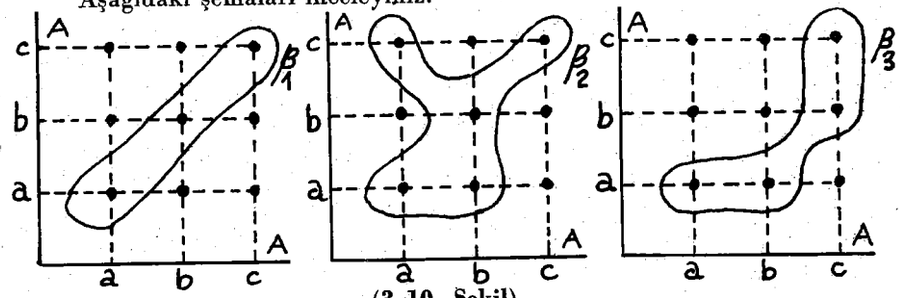
A={a, b, c} olsun. A üzerinde birer bağıntı olan aşağıdaki kümeleri gözönüne alalım.

$\beta_1=\{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

$\beta_2=\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (b, a)\}$

$\beta_3=\{(a, a), (c, c), (b, a), (c, b)\}$

Aşağıdaki şemaları inceleyiniz.



(3–10. Şekil)

Bunlardan, β_1 ve β_2 de A kümesindeki her elemanın kendisi ile oluşturduğu ikililerin tümünün bulunduğuna dikkat ediniz. A'nın elemanlarını x ile gösterirsek, $\forall x\in A$ için $(x, x)\in\beta_1$ ve $(x, x)\in\beta_2$ dir. Böyle bağıntılara yansıyan bağıntı diyeceğiz. Öte yandan $b\in A$ olduğu halde, $(b, b)\notin\beta_3$ olduğunu da görünüz. Bu sebeple, β_3 bağıntısı A da yansıyan değildir diyeceğiz.

3–5. Tanım

β, A'da bir bağıntı olsun. Her $x\in A$ için $(x, x)\in\beta$ oluyorsa β bağıntısının **yansıma** özeliği vardır ya da β **yansıyan** bir bağıntıdır, denir.

Bu tanıma göre, örneğin, A={1, 2, 3, 4} kümesi üzerinde verilen,

$\beta_1=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

$\beta_2=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (4, 2), (2, 3)\}$

$\beta_3=\{(1, 1), (3, 1), (3, 3), (1, 3), (2, 2), (4, 4)\}$

bağıntılarının hepsi de yansıyan bağıntıdır. Neden?

$\forall x\in A$ için (x, x) ikilisinin bu bağıntıların üçünde de eleman olduğuna dikkat ediniz. β_2 ve β_3 de AxA nın (x, x) ikililerinden farklı elemanlarının da bulunduğunu görüyorsunuz. Bu durum 3–5. Tanıma aykırı değildir. Şimdi de, A'da yansımayan bir β_4 bağıntısı yazalım.

$\beta_4 = \{(1, 1), (3, 3), (4, 4), (1, 4), (4, 1)\}$ bağıntısı A'da yansımaz. Çünkü, $2 \in A$ olduğu halde, $(2, 2) \notin \beta_4$ tür. Siz de A'da yansımayan bir bağıntı yazınız.

Yukarıda yazdığımız β_4 bağıntısında, $(1, 4) \in \beta_4$ ve $(4, 1) \in \beta_4$ tür. Her $(x, y) \in \beta_4$ için $(y, x) \in \beta_4$ diyebiliriz, değil mi? Aşağıdaki tanımı okuyunuz.

3–6. Tanım

β, A'da bir bağıntı olsun. Her $(x, y) \in \beta$ için $(y, x) \in \beta$ oluyorsa β bağıntısının **simetri** özeliği vardır, ya da β **simetrik** bir bağıntıdır, denir.

3–8. Örnek

$A = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde verilen aşağıdaki bağıntılardan simetrik olmayan varsa söyleyiniz.

a) $\beta_1 = \{(a, a), (b, b)\}$

b) $\beta_2 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$

c) $\beta_3 = \{(a, a), (a, b), (b, d), (b, a), (d, b)\}$

d) $\beta_4 = \{(b, b), (b, c), (d, a), (a, d)\}$

Çözüm : β_1 bağıntısı simetriktir. Çünkü, $(a, a) \in \beta_1$ olması, $(x, y) \in \beta_1$ iken $(y, x) \in \beta_1$ şartını gerçekler. Yine, $(b, b) \in \beta_1$ olması da bu şarta uygundur. β_4 bağıntısı simetrik değildir, çünkü, $(b, c) \in \beta_4$ olduğu halde, $(c, b) \notin \beta_4$ dür. β_2 ve β_3 bağıntıları simetriktir. Neden? (3–6. Tanımı hatırlayınız). Bunlardan β_2 bağıntısının aynı zamanda yansıyan olduğunu da görünüz. Siz de yukarıda verilen A kümesi üzerinde simetrik olan bağıntılar yazınız. Şimdi, ters simetrik bağıntının tanımını verelim.

3–7. Tanım

β, A'da bir bağıntı olsun. Her $x, y \in A$ ve $x \neq y$ için (x, y) ile (y, x) ikililerinden en çok biri β nın elemanı ise ya da, her $x, y \in A$ için,

$$((x, y) \in \beta \text{ ve } (y, x) \in \beta) \Rightarrow x = y$$

oluyorsa, β bağıntısının **ters–simetri** özeliği vardır, ya da β **ters–simetrik** bir bağıntıdır denir.

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde verilen aşağıdaki bağıntıların ters–simetrik olup olmadığını söyleyiniz.

a) $\beta_1 = \{(1, 1), (1, 2), (3, 2)\}$

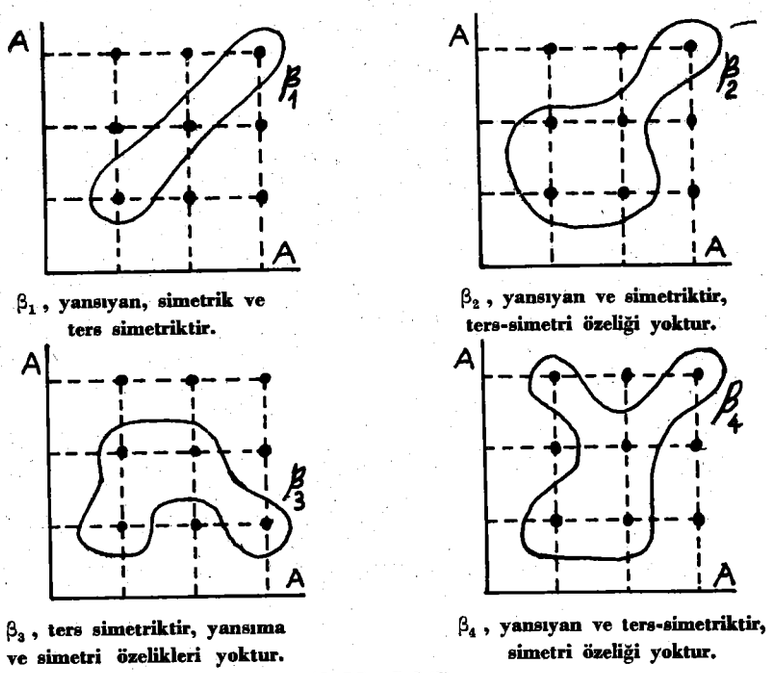
b) $\beta_2 = \{(2, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 1)\}$

c) $\beta_3 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

d) $\beta_4 = \{(2, 1), (1, 1), (2, 2), (1, 2)\}$

Çözüm : β_1 ve β_3 bağıntıları 3–7. Tanıma uygundur. Şu halde, bunlar ters–simetriktirler. β_2 bağıntısı ters simetrik değildir. Çünkü, $1 \neq 3$ olduğu halde hem $(1, 3) \in \beta_2$ ve hem de $(3, 1) \in \beta_2$ dir. Bu durum 3–7. tanıma aykırıdır. β_2 bağıntısı aynı zamanda simetrik değildir. Neden? $(2, 3) \in \beta_2$ olduğu halde, $(3, 2) \notin \beta_2$ olduğunu görünüz. β_4 bağıntısı ise ters–simetrik değildir fakat simetriktir. Neden?

(3–11. Şekil) deki şemalarla verilen bağıntıların, buraya kadar öğrendiğiniz özeliklere sahip olup olmadıkları beraberce yazılmıştır, bu şekli inceleyiniz.



β_1, yansıyan, simetrik ve ters simetriktir.

β_2, yansıyan ve simetriktir, ters-simetri özeliği yoktur.

β_3, ters simetriktir, yansıma ve simetri özelikleri yoktur.

β_4, yansıyan ve ters-simetriktir, simetri özeliği yoktur.

(3–11. Şekil)

3–10. Örnek

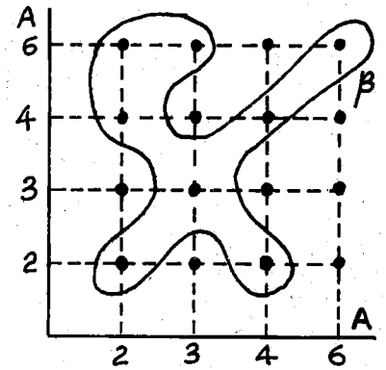
A={0, 1, 2, 5, 6} kümesi üzerinde, β={(x, y)|x, y yi böler} bağıntısı veriliyor. Bu bağıntıyı liste yöntemi ile yazalım. Yansıma, simetri ve ters–simetri özeliklerinin olup olmadığını söyleyelim.

Çözüm : β={(1, 1), (2, 2), (5, 5), (6, 6), (1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 6)} olduğunu kolayca bulabilirsiniz. (ikililerin herbirinde birinci elemanın ikinciyi böldüğüne ve bu özeliği gerçekleyen başka bir ikili olmadığına dikkat ediniz.) 0∈A olduğu halde (0, 0) ∉ β olduğundan β nın yansıma özeliği yoktur. (Eğer, 0∉A olsaydı o zaman β yansıyan bir bağıntı olurdu, değil mi?) Sözgelimi, (1, 2)∈β fakat (2, 1)∉β olduğundan β simetrik değildir. Ayrıca, ters–simetri tanımını gerçeklediği için β ters–simetrik bir bağıntıdır.

Kolaylık için "x, y yi böler" tümcesini "x|y" biçiminde yazacağız. Buna göre, aşağıdaki örnekte, "x|y²" yi "x böler y²" diye okuruz.

3–11. Örnek

A={2, 3, 4, 6} kümesi üzerinde, β={(x, y)| x|y²} bağıntısı veriliyor. β yı liste yöntemi ile yazıp özeliklerini söyleyelim.



(3–12. Şekil)

(3–12. Şekil) de β bağıntısını görüyorsunuz. Buna göre,

β={(2 , 2), (3 , 3), (4 , 4), (6 , 6), (2 , 4), (2 , 6), (3 , 6), (4 , 2)} dir. β nın yansıyan bir bağıntı olduğunu kolayca söyleyebilirsiniz. β nın hem simetrik olmadığını hem de ters–simetrik olmadığını görebildiniz mi? Gerçekten, (2 , 6)∈β fakat (6 , 2) ∉ β olması β nın simetrik olmadığını söylememize yeter. Bunun gibi, (2 , 4)∈β ve (4 , 2)∈β olması nedeniyle de β ters–simetrik değildir diyebiliriz.

Şimdi de geçişken bağıntıyı görelim. Söz gelimi, Erol, Cengiz'in ağabeyi ve Cengiz de Caner'in ağabeyi ise Erol, Caner'in de ağabeyidir, deriz. Şu halde, insanlar kümesi üzerinde verilen, ağabey olma bağıntısının geçişme özeliği vardır. Geçişken bağıntının tanımını aşağıda bulacaksınız.

3–8. Tanım

β, A'da bir bağıntı olsun.

∀[(x, y)∈β ve (y, z)∈β] için (x, z)∈β oluyorsa, β bağıntısının **geçişme** özeliği vardır veya β **geçişken** bir bağıntıdır, denir.

3–12. Örnek

A = {1, 2, 3, 4} kümesi üzerinden verilen,

β_1 = {(1, 1), (1, 3) (2, 4) (3, 4), (1, 4)}

β_2 = {(2, 3), (3, 1), (4, 4)}

bağıntılarının geçişken olup olmadığını söyleyiniz.

Çözüm :

(1, 3)∈β_1 ve (3, 4)∈β_1 iken (1, 4)∈β_1 dir. Yine,

(1, 1)∈β_1 ve (1, 3)∈β_1 iken (1, 3)∈β_1 ve

(1, 1)∈β_1 ve (1, 4)∈β_1 iken (1, 4)∈β_1

diyebiliriz. β_1 de yukarıdaki biçimde araştırılacak başka eleman çifti kalmadığı için β_1 bağıntısı geçişkendir. Şimdi, β_2 bağıntısına geçelim.

(2, 3)∈β_2 ve (3, 1)∈β_2 olduğu halde (2, 1)∉β_2 olduğunu görünüz.

Şu halde, β_2 geçişken bir bağıntı değildir.

3–13. Örnek

A={0, 1, 2, 3} kümesi üzerinde verilen,

β={(x, y)|x, y∈A ve x<y}

bağıntısının geçişken olup olmadığını söyleyiniz.

Çözüm : Önce β yı liste yöntemi ile yazalım.

β={(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)}

dir.

$(0, 1) \in \beta$ ve $(1, 2) \in \beta$ iken $(0, 2) \in \beta$ dır.

$(0, 1) \in \beta$ ve $(1, 3) \in \beta$ iken $(0, 3) \in \beta$ dır.

$(0, 2) \in \beta$ ve $(2, 3) \in \beta$ iken $(0, 3) \in \beta$ dır.

$(1, 2) \in \beta$ ve $(2, 3) \in \beta$ iken $(1, 3) \in \beta$ dır.

Şu halde, β geçişken bir bağıntıdır.

3–3. Alıştırmalar

1. Aşağıda verilen bağıntıların tanımlandıkları küme içinde, yansıma, simetri, ters–simetri ve geçişme özelikleri olup olmadığını araştırınız.

a) Doğrular kümesi üzerinde paralellik bağıntısı,

b) Doğrular kümesi üzerinde diklik bağıntısı,

c) Tamsayılar kümesi üzerinde $\leqslant$ (küçük veya eşit olma) bağıntısı,

d) Üçgenler kümesi üzerinde benzerlik bağıntısı.

2. $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesi veriliyor. Bu küme üzerinde aşağıda verilen bağıntıların, yansıma, simetri, ters–simetri ve geçişme özeliklerinin olup olmadığını söyleyiniz.

a) $\beta_1 = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

b) $\beta_2 = \{(0, 0, (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 4), (4, 1)\}$

c) $\beta_3 = \{(0, 2), (2, 0), (0, 3), (3, 1)\}$

d) $\beta_4 = \{(3, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 3)\}$

3. $A = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde aşağıda verilen koşullara uygun olan birer bağıntı yazınız.

a) Yansıyan ve Simetrik.

b) Simetrik değil ve ters–simetrik değil.

c) Simetrik fakat geçişken değil.

d) Ters–simetrik fakat geçişken değil.

e) Yansıyan, simetrik, ters–simetrik ve geçişken.

4. Tamsayılar kümesi üzerinde verilen aşağıdaki bağıntıların, yansıma, simetri, ters–simetri ve geçişme özeliklerinin olup olmadığını araştırınız.

a) $\beta_1 = \{(x, y) \mid x - y = 0\}$

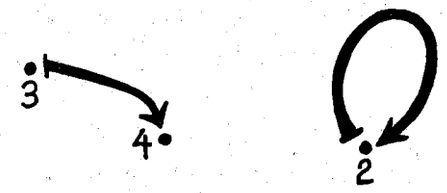
b) $\beta_2 = \{(x, y) \mid x \leqslant y\}$

c) $\beta_3 = \{(x, y) \mid x | y\}$

d) $\beta_4 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 13\}$

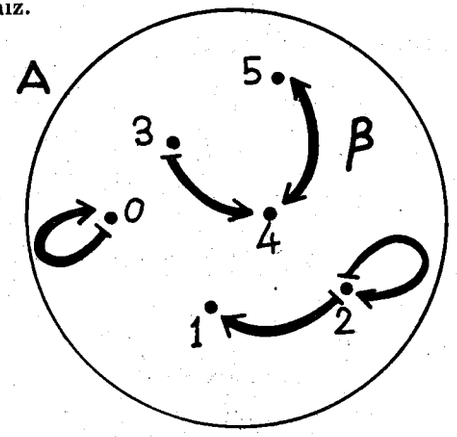
e) $\beta_5 = \{(x, y) \mid x^2 = y^2\}$

5. A kümesi üzerinde bir β bağıntısı verildiğinde eğer, $(x, y) \in \beta$ ise bunu, x den y ye giden yönlü bir çizgi ile gösterelim. Örneğin, $(3, 4) \in \beta$ ve $(2, 2) \in \beta$ ise bunu (3–13. Şekil) de görüldüğü gibi çizelim.



(3–13. Şekil)

Buna göre, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesi üzerinde verilen bir β bağıntısı (3–14. Şekil) de belirtilmiştir. Bu β bağıntısını liste yöntemi ile yazınız. Yansıma, simetri, ters–simetri ve geçişme özelikleri olup olmadığını söyleyiniz.



(3–14. Şekil)

3–4. Denklik ve Sıralama Bağıntıları

Elemanları bağıntılar olan bir küme düşününüz. Bu kümenin elemanlarından bazılarını sahip oldukları özeliklere göre adlandıracağız.

Denklik Bağıntısı

İnsanlar kümesi üzerinde, eşit yaşta olma bağıntısını ele alalım. Bu bağıntının yansıma, simetri ve geçişme özelikleri olduğunu kolayca söyleyebilirsiniz. Bunun gibi üçgenler kümesi üzerinde benzerlik bağıntısını düşünelim. (Karşılıklı açıları eş ve karşılıklı kenarları orantılı olan üçgenlere, benzer üçgenler denir.) Her üçgen kendisine benzer olduğundan bu bağıntının yansıma özeliği vardır. Eğer $\widehat{ABC}$ üçgeni $\widehat{DEF}$ üçgenine benzer ise $\widehat{DEF}$ üçgeni de $\widehat{ABC}$ üçgenine benzerdir. Şu halde, bu bağıntının simetri özeliği de vardır. Yine, $\widehat{ABC}$ üçgeni $\widehat{DEF}$ üçgenine benzer ve $\widehat{DEF}$ üçgeni de $\widehat{PAR}$ üçgenine benzer ise $\widehat{ABC}$ üçgeni $\widehat{PAR}$ üçgenine benzerdir, diyebilirsiniz. O halde, bu bağıntının geçişme özeliği de vardır. Siz de, yansıma, simetri ve geçişme özelikleri olan başka bağıntılar söyleyiniz. Böyle bağıntılara, denklik bağıntısı diyeceğiz.

3–9. Tanım

Bir A kümesi üzerinde verilen bir β bağıntısının yansıma, simetri ve geçişme özelikleri varsa β ya A üzerinde bir **denklik** bağıntısı denir. Bir denklik bağıntısı ile birbirine bağlı olan iki elemana da birbirine denktirler denir.

3–14. Örnek

$A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

kümesi üzerinde verilen,

$$\beta=\{(x, y)|\quad 3|x-y\}$$

bağıntısını gözönüne alalım. Örneğin, $(11, 2)\in\beta$ dır. Neden? (11—2 nin 3 ile bölündüğünü görünüz.) Siz de, β nın elemanı olan dört tane ikili söyleyiniz.

Şimdi, bu β bağıntısının yansıma, simetri ve geçişme özelikleri olduğunu ispat edelim.

a) $\forall x\in A$ için, $x-x=0$ dır. Sıfır, 3 ile bölündüğü için, $(x, x)\in\beta$ dır. Şu halde, β nın yansıma özeliği vardır.

b) $(x, y)\in\beta$ için, x—y, 3 ile bölünür, yani, k bir tamsayı olmak üzere "$x-y=3k$"dır. Buradan, $y-x=3(-k)$ yazabiliriz. k bir tamsayı olduğu için —k da bir tamsayıdır. O halde, y—x de 3 ile bölünür. Yani, $(y, x)\in\beta$ dır. Böylece, β bağıntısının simetri özeliği de vardır, diyebiliriz.

c) β nın geçişme özeliği de vardır. Çünkü,

$$(x, y)\in\beta \Rightarrow x-y=3k_1\ , \quad (k_1, \text{ bir tam sayıdır.})$$
$$(y, z)\in\beta \Rightarrow \underline{+y-z=3k_2\ ,} \quad (k_2, \text{ bir tam sayıdır.})$$
$$x-z=3\underbrace{(k_1+k_2)}_{k}$$
$$x-z=3k, \quad (k, \text{ bir tamsayıdır.}) \text{ Neden?}$$

Buradan, $(x, z)\in\beta$ yazabiliriz.

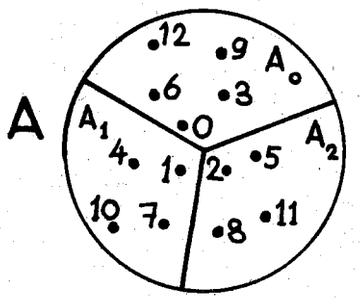
Yansıma, simetri ve geçişme özelikleri olduğu için β bir denklik bağıntısıdır. Örneğin, $(1, 4)\in\beta$ dır. Yani, farkları 3 ile bölünebilme bağıntısına göre 1 tamsayısı 4'e denktir. Bunu, $1\equiv 4 \pmod 3$ biçiminde de yazarız ve "3 modülüne göre 1 denktir 4" diye okuruz. Bunun gibi $7\equiv 4 \pmod 3$ ve $2\equiv 5 \pmod 3$ olduğunu da söyleyebiliriz. A kümesinin birbirine denk olan elemanlarının oluşturduğu kümeleri yazalım. Bunlar,

$A_0=\{0, 3, 6, 9, 12\}$

$A_1=\{1, 4, 7, 10\}$

$A_2=\{2, 5, 8, 11\}$

kümeleridir. Bu kümelerin her birine, β nın A dan ayırdığı bir denklik sınıfı denir. (3–15. Şekil) de bu denklik sınıflarını görüyorsunuz.



(3–15. Şekil)

3–10. Tanım

β, A da bir denklik bağıntısı olsun. Herhangi bir $x\in A$ ya β bağıntısı ile bağlı olan A nın tüm y elemanlarının kümesine x'in denklik sınıfı denir ve $\bar{x}$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre, β, A da bir denklik bağıntısı olmak üzere,

$$\overline{x}=\{y|\ (x\ ,\ y)\in\beta\}$$

dır. Buna göre, örneğin, (3–15. Şekil) deki denklik sınıflarını,

$$\overline{0}=\{0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12\}$$

$$\overline{1}=\{1,\ 4,\ 7,\ 10\}$$

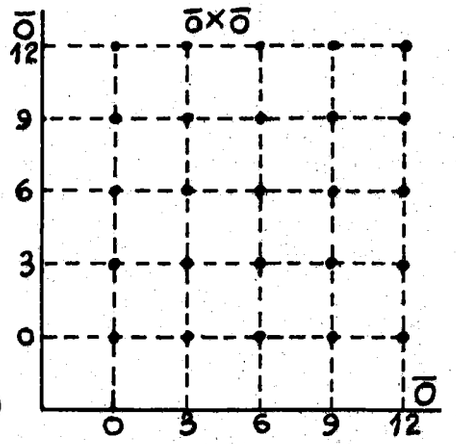
$$\overline{2}=\{2,\ 5,\ 8,\ 11\}$$

biçiminde gösterebiliriz. (Bu sınıflara 3'ün kalan sınıfları da denir.) Bu denklik sınıflarının herbirinden β için kaç tane eleman oluştuğunu hesaplayabiliriz. Önce, $(x\ ,\ y)\in\beta$ ise $x\equiv y\ (\mathrm{mod}\ 3)$ olduğunu hatırlayınız. Bunun karşıtı da doğrudur. Öyleyse,

$(x\ ,\ y)\in\beta \iff$ x ile y aynı denklik sınıfının elemanıdır.

diyebiliriz.

$\overline{0}=\{0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12\}$ olduğundan $\overline{0}$ dan β için oluşan eleman sayısını hesaplayalım. (3–16. Şekil) i inceleyiniz.



(3–16. Şekil)

Yukarıdaki şekilde gördüğünüz 0x0 nın her elemanı β nın bir elemanıdır, değil mi?

$$s(\overline{0}x\overline{0})=s(\overline{0}).s(\overline{0})=5.5=25$$

dir. Bunun gibi,

$$s(\overline{1}x\overline{1})=s(\overline{1}).s(\overline{1})=4.4=16$$

ve

$$s(\overline{2}x\overline{2})=s(\overline{2}).s(\overline{2})=4.4=16$$

bulunur. Buna göre,

$$s(\beta)=25+16+16=57$$

dir.

3–15. Örnek

$A=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\}$ kümesi üzerinde verilen,

$$\beta=\{(x,\ y)|x-y,\ 2\ \text{ile bölünür}\}$$

bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz ve bu bağıntının oluşturduğu denklik sınıflarını yazınız.

Çözüm : β nın bir denklik bağıntısı olduğunu, 3–14. Örnekteki gibi gösterebilirsiniz. Bu, β bağıntısı iki tane denklik sınıfı oluşturur. Bunlar,

$\overline{0}=\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \ldots\}$, $\overline{1}=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots\}$ dir.

3–4. Alıştırmalar

1) $A=\{x|x$ tamsayı ve $0\leqslant x<25\}$ kümesi üzerinde,

$$\beta=\{(x,\ y)|y-x,\ 4\ \text{ile bölünür}\}$$

bağıntısı veriliyor. β nın bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz ve A dan oluşturduğu denklik sınıflarını yazınız.

2) $x\equiv y\ (\mathrm{mod}\ 2)$ ve $u\equiv v\ (\mathrm{mod}\ 2)$ olduğu veriliyor.

$$x+u\equiv y+v\ (\mathrm{mod}\ 2)$$

olduğunu ispatlayınız.

3) Bir düzlem içindeki doğruların kümesine A diyelim. A üzerinde verilen "iki doğrunun paralel veya çakışık olma" bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz. Bu bağıntının belirttiği denklik sınıflarının her birindeki elemanların ortak özeliği nedir?

4) $A=\{1,\ 2,\ 3\}$ kümesi üzerinde iki tane denklik bağıntısını elemanları ile yazınız.

5) $A=\{a,\ b,\ c\}$ ve $B=\{a,\ b\}$ kümeleri veriliyor. A üzerinde verilen bir denklik bağıntısı B üzerinde de bir denklik bağıntısı olabilir mi? Cevabınızı açıklayınız.

6) $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ ve $B=\{1,\ 2,\ 3\}$ kümeleri veriliyor. B üzerinde verilen bir denklik bağıntısı, A üzerinde de bir denklik bağıntısı olabilir mi? Cevabınızı açıklayınız.

7) İnsanlar kümesi üzerinde, biri diğerine kan verebilme bağıntısı bir denklik bağıntısı değildir. Neden? (Yol: Kan gruplarını ve özeliklerini öğrenerek bu sorunun cevabını veriniz.)

8) β_1, A da bir denklik bağıntısı olsun.

$$\beta_2=\{(y,\ x)|(x,\ y)\in\beta_1\}$$

bağıntısının A da bir denklik bağıntısı olduğunu ispatlayınız.

Sıralama Bağıntısı

Elemanları kümeler olan bir E kümesi üzerinde, $\beta = \{(A, B) | A \subset B\}$ bağıntısını düşünelim.

a) Her, $A \in E$ için, $A \subset A$ dır. (β nın yansıma özeliği var.)

b) $(A \subset B$ ve $B \subset A) \Rightarrow A = B$ dir. (β nın ters-simetri özeliği var.)

c) $A \subset B$ ve $B \subset C$ ise $A \subset C$ dir. (β nın geçişme özeliği var.)

Böylece, β bağıntısının, yansıma, ters-simetri ve geçişme özelikleri olduğunu belirtmiş oluyoruz. İnsanlar kümesi üzerinde, birinin ötekine kan verebilme bağıntısının da aynı özelikleri olduğunu açıklayınız. Böyle bağıntılara, sıralama bağıntısı diyeceğiz.

3-11. Tanım

Bir A kümesindeki bir β bağıntısının, yansıma, ters-simetri ve geçişme özelikleri varsa bu bağıntıya, **sıralama** bağıntısı denir.

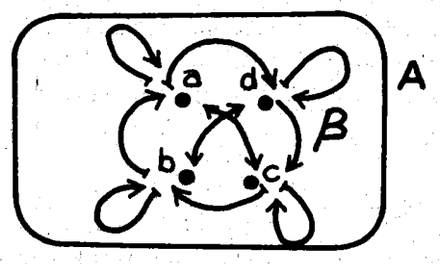
3-16. Örnek

$A = \{1, 2, 3\}$ kümesi üzerinde, $\beta = \{(x, y) | x \leqslant y\}$ bağıntısı verilsin. Bu bağıntının bir sıralama bağıntısı olduğunu gösteriniz.

Çözüm : Önce, β yı liste yöntemi ile yazalım.

$\beta = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ dir. $\forall x \in A$ için $(x, x) \in \beta$ olduğunu görüyorsunuz. Şu halde, β yansıyan bir bağıntıdır. Ayrıca, burada $(1, 2) \in \beta$ ve $(2, 1) \notin \beta$, $(1, 3) \in \beta$ ve $(3, 1) \notin \beta$, $(2, 3) \in \beta$ ve $(3, 2) \notin \beta$ olduğu için β nın ters-simetri özeliği de vardır. β nın geçişme özeliği olduğunu da siz gösteriniz. Şu halde β, bir sıralama bağıntısıdır.

Siz de, bir A kümesi belirterek, bunun üzerinde yansıma, ters-simetri ve geçişme özelikleri olan bağıntılar yazınız. Bunların her biri sıralama bağıntısıdır. Değil mi?



(3-17. Şekil)

$A = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde verilen bir β bağıntısı (3-17. Şekil) ile belirtilmiştir. β yı liste yöntemi ile yazınız. β bir sıralama bağıntısı değildir, neden?

3-5. Alıştırmalar

1) $A = \{2, 3, 5, 6\}$ kümesi üzerinde, $\beta = \{(x, y) | x \leqslant y\}$ bağıntısı veriliyor. β yı liste yöntemi ile yazınız ve β nın bir sıralama bağıntısı olduğunu gösteriniz.

2) $A = \{2, 3, 4, 6\}$ kümesi üzerinde verilen, $\beta = \{(x, y) | x | y\}$ bağıntısının bir sıralama bağıntısı olduğunu gösteriniz ve β yı, elemanları ile yazınız.

3) $A = \{0, 2, 3, 4, 6\}$ kümesi üzerinde verilen, $\beta = \{(x, y) | x | y\}$ bağıntısı bir sıralama bağıntısı mıdır? Neden? β yı elemanları ile yazınız.

4) β_1, A kümesi üzerinde bir sıralama bağıntısı olarak veriliyor. Ayrıca, $\forall (x, y) \in \beta_1$ için $(y, x) \in \beta_2$ olmak üzere A üzerinde bir β_2 bağıntısı daha tanımlanıyor. β_2 nin de A üzerinde bir sıralama bağıntısı olduğunu ispatlayınız.

5) β, A da bir sıralama bağıntısı ve $B \subset C$ olduğuna göre, β nın B de bir sıralama bağıntısı olamıyacağını açıklayınız.

6) β, A da bir sıralama bağıntısı ve $A \subset B$ olduğuna göre, β, B de bir sıralama bağıntısı olur mu? Cevabınızı açıklayınız.

3-5. Fonksiyon

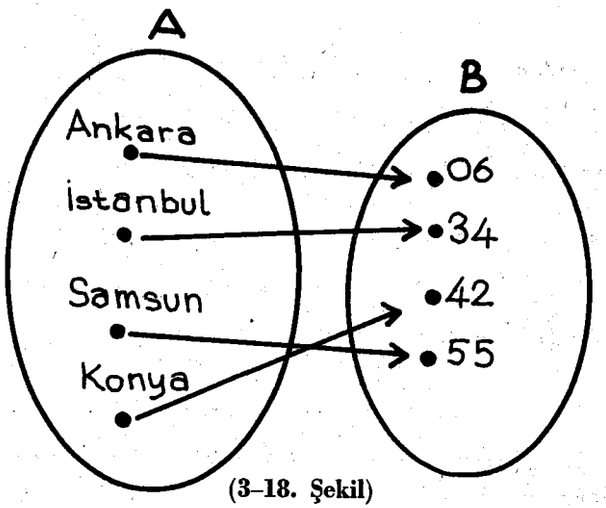
Okulunuzdan yirmi kişilik bir izci grubunun yakın bir köyü ziyaret ettiğini ve geceyi köyde geçireceklerini varsayalım. Köyde otuz tane ev bulunsun. Bu durumda, köydeki bazı evlerde izcilerin kalamıyacakları açıktır. Bazı evlerde ise birden fazla izci kalabilir. İzcilerin kümesine A, köydeki evlerin kümesine de B diyelim. Burada, A nın elemanları ile B nin elemanları arasında bir eşleme yapılmaktadır. A nın her elemanı B nin yalnız bir elemanı ile eşlenmekte, B nin bir elemanı ise A nın bir veya birden fazla elemanı ile eşlenmekte veya hiç eşlenmemektedir.

$A = \{\text{Ankara, İstanbul, Samsun, Konya}\}$

ve

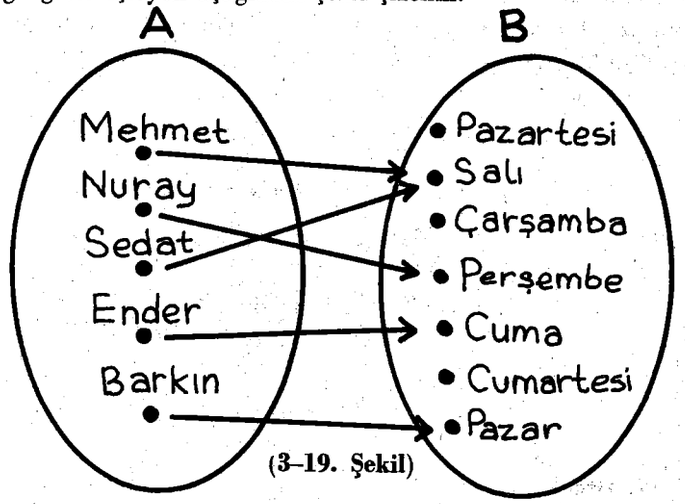
$B = \{06, 34, 42, 55\}$

olsun. A'nın her elemanını B'deki kendi trafik numarasına eşleyen bağıntıyı şema ile gösterelim. (3-18. Şekil) i inceleyiniz.



(3–18. Şekil)

Şimdi de, A={Mehmet, Nuray, Sedat, Ender, Barkın} kümesini alalım. Haftanın günlerinin kümesi de B olsun. A'nın her elemanını doğduğu güne eşleyen aşağıdaki şekli çizelim.



(3–19. Şekil)

Yukarıdaki şekilde Mehmet ve Sedat'ın aynı günde doğdukları anlaşılıyor. Burada, A'nın her elemanının B'nin bir tek elemanı ile eşlendiğine ve B'nin bazı elemanlarının ise A'nın hiçbir elemanı ile eşlenmediğine dikkat ediniz.

Buraya kadar verdiğimiz örneklerle, özel bir bağıntı olan fonksiyonu tanıtmaya çalıştık. Şimdi fonksiyonu tanımlayalım.

3–12. Tanım

f, A dan B ye bir bağıntı olsun. Eğer,

a) $\forall x \in A$ için $\exists y \in B$ varsa öyle ki $(x, y) \in f$

ve,

b) $\forall x \in A$ ve $y, z \in B$ için,

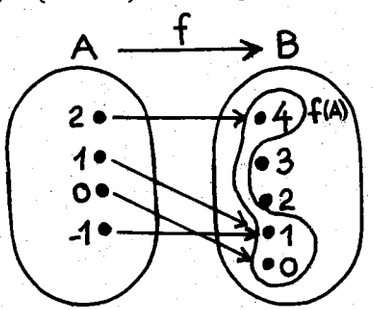
$$((x, y) \in f \text{ ve } (x, z) \in f) \Rightarrow y = z$$

oluyorsa f bağıntısına A dan B ye bir **fonksiyon** denir, ve;

$$f : A \to B \text{ veya } A \xrightarrow{f} B$$

biçimlerinde gösterilir. A ya fonksiyonun **tanım** kümesi, B ye **değer** kümesi denir. A tanım kümesinin eşleştiği B değer kümesinin elemanlarının oluşturduğu kümeye de A nın **görüntü** kümesi denir ve f(A) ile gösterilir.

Bu tanıma göre; f, A dan B ye bir fonksiyon ise, $f(A) = \{y | (x, y) \in f\}$ kümesidir. (3–20. Şekil) de A dan B ye verilmiş bir f fonksiyonunu görüyorsunuz. (f nin 3–12. Tanımındaki koşulları gerçeklediğine dikkat ediniz.) Burada $f(A) = \{0, 1, 4\}$ dür, değil mi?



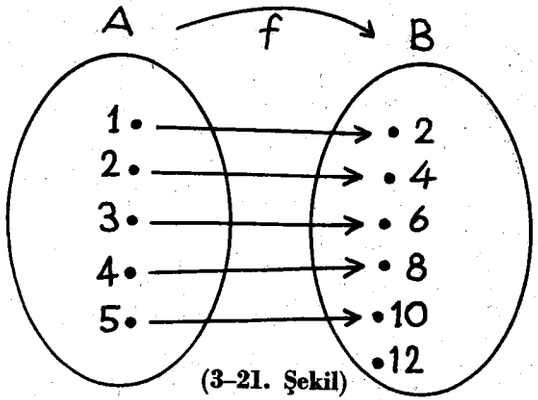
(3–20. Şekil)

3–17. Örnek

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ kümeleri veriliyor.

$f : A \to B$ ve $f = \{(x, y) | y = 2x,\ x \in A,\ y \in B\}$ bağıntısının şemasını çiziniz. f'yi elemanları ile yazınız. Bu bağıntı bir fonksiyon mudur? Cevabınızı açıklayınız.

Çözüm : (3–21. Şekil) i inceleyiniz.



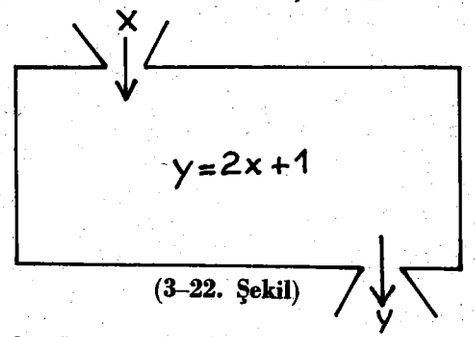
(3–21. Şekil)

$f=\{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (5, 6)\}$ dır. A nın her elemanının f ile B'nin yalnız bir elemanına eşlendiğini görüyorsunuz. Şu halde, f, A'dan B'ye bir fonksiyondur. Burada, $f(A)=B$ olduğuna da dikkat ediniz.

Yukarıda, $(1, 2)\in f$ olduğunu görüyorsunuz. Bunu, $f(1)=2$ biçiminde yazacağız. Bunun gibi, $f(2)=4$, $f(3)=8$ ve $f(5)=10$ dur. Genel olarak, f bir fonksiyon ve $(x, y)\in f$ ise x'in f fonksiyonu ile elde edilen görüntüsü y'dir, deriz ve $y=f(x)$ biçiminde yazarız.

3–18. Örnek

Aşağıdaki gibi basit bir makina düşünelim.



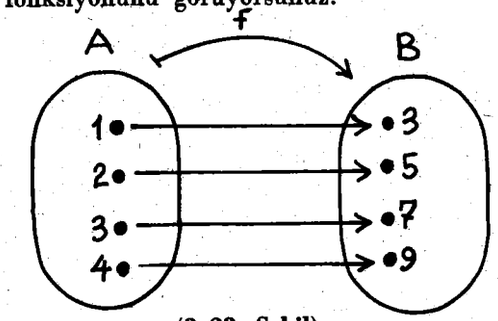
(3–22. Şekil)

Bu makina, kendisine atılan her tamsayının iki katının bir fazlasını versin. Makinaya 3 atarsanız hangi sayıyı alırsınız? Makinaya atılan her x sayısını, makinadan çıkan y sayısı ile eşleyelim. Elde edilen kümeye f diyelim. Bu küme,

$$f=\{(x, y)\mid x \text{ tamsayı ve } y=2x+1\}$$

kümesidir. f, tamsayılardan tamsayılara bir fonksiyondur. Neden?

$A=\{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin elemanlarını makinaya atarsak; makinadan alınan sayıların kümesi, $B=\{3, 5, 7, 9\}$ olur. Aşağıdaki şemada A'dan B'ye f fonksiyonunu görüyorsunuz.



(3–23. Şekil)

3–19. Örnek

$A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{1, 2, 3, 4\}$ kümeleri veriliyor. Aşağıdaki bağıntıların her birinin A'dan B'ye bir fonksiyon olup olmadığını söyleyiniz. Nedenlerini açıklayınız.

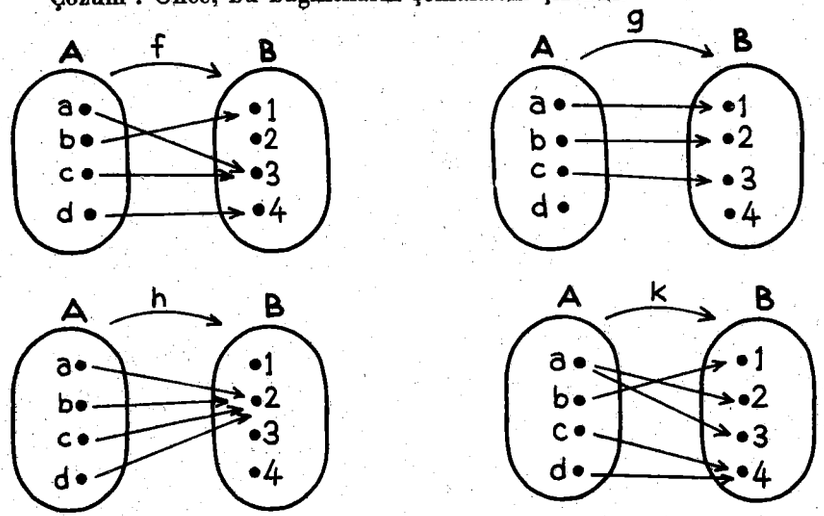
a) $f = \{(a, 3), (b, 1), (c, 3), (d, 4)\}$

b) $g = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$

c) $h = \{(a, 2), (b, 2), (c, 2), (d, 2)\}$

d) $k = \{(a, 2), (a, 3), (b, 1), (c, 4), (d, 4)\}$

Çözüm : Önce, bu bağıntıların şemalarını çizelim.



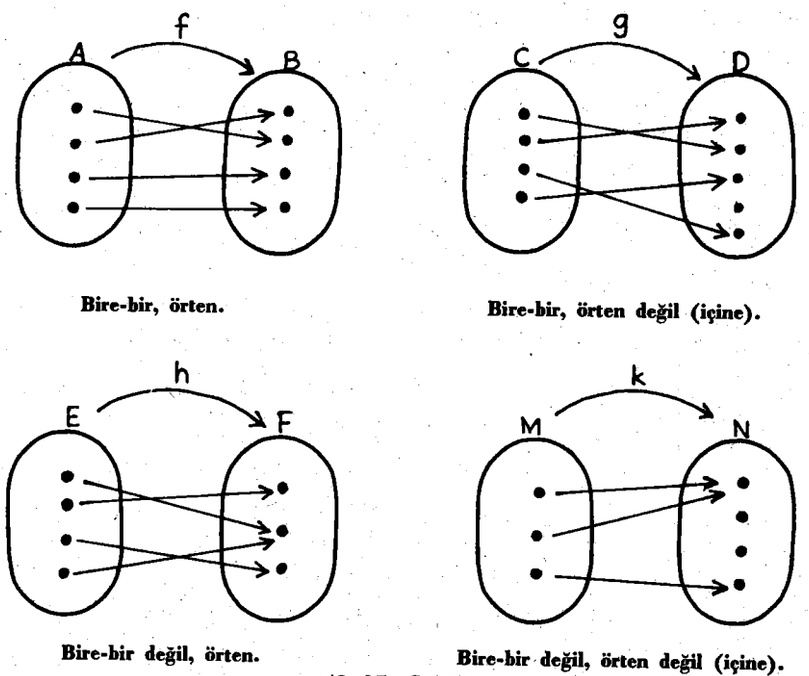
(3–24. Şekil)

f ve h, A'dan B'ye bir fonksiyondur. Çünkü, her ikisinde de A'nın her elemanı B'nin yalnız bir elemanı ile eşlenmektedir. Şimdi g bağıntısına dikkat ediniz. d∈A olduğu halde, d'nin B'deki hiçbir elemanla eşlenmediğini görüyorsunuz. Bu durum, fonksiyon tanımına aykırıdır. Şu halde, g, A'dan B'ye bir fonksiyon değildir. k da A'dan B'ye bir fonksiyon değildir. Çünkü, A'nın a elemanı B'nin birden fazla elemanı ile eşlenmiştir.

Siz de yukardaki A ve B kümelerini alarak şema üzerinde çeşitli fonksiyonlar belirtiniz.

3–6. Fonksiyon Türleri

Aşağıda dört çeşit fonksiyon görüyorsunuz. Bu fonksiyonların türleri, şemaların altına yazılmıştır. Bunları dikkatle inceleyiniz ve sonra, aşağıdaki tanımı okuyunuz.



Bire-bir, örten. **Bire-bir, örten değil (içine).**

Bire-bir değil, örten. **Bire-bir değil, örten değil (içine).**

(3–25. Şekil)

Bir fonksiyonun bire–bir olması ile örten olmasının ne anlama geldiğini sezebildiniz, mi? Şimdi bunları tanımlayalım.

3–13. Tanım

f : A→B bir fonksiyon olsun.

a) $\forall x_1, x_2 \in A$ için,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

oluyorsa f ye **bire–bir** fonksiyon denir. (Başka bir deyişle, A tanım kümesinin her farklı iki elemanının görüntüleri farklı ise f bire–bir fonksiyondur.)

b) $\forall y \in B$ için $\exists x \in A$ varsa öyle ki, $y=f(x)$ oluyorsa f ye **örten fonksiyon** denir. (Başka bir deyişle, $f(A)=B$ ise f örten fonksiyondur.)

Bir gerektirmenin karşıt–tersinin kendisine eşdeğer olduğunu biliyorsunuz. Öyleyse, yukarıdaki tanımın (a) kısmındaki gerektirmenin karşıt–tersini yaparak,

f : A→B bir fonksiyon olsun. $\forall x_1, x_2 \in A$ için,

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

oluyorsa f bire–bir fonksiyondur, diyebilirsiniz.

3–20. Örnek

$A=\{1, 2, 3, 4\}$ ve $B=\{2, 5, 8, 11, 12\}$ kümeleri ve $f : A \to B$, $f : x \to 3x-1$ fonksiyonu veriliyor. f nin bire–bir olup olmadığını ve örten olup olmadığını belirtiniz.

Çözüm : $f(x)=3x-1$ veriliyor.

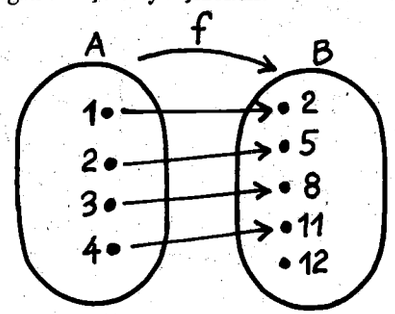
$x=1$ için, $f(1)=3.1-1=2$

$x=2$ için, $f(2)=3.2-1=5$

$x=3$ için, $f(3)=3.3-1=8$

$x=4$ için, $f(4)=3.4-1=11$

bulunur. Şimdi; aşağıdaki şemayı çizelim.



(3–26. Şekil)

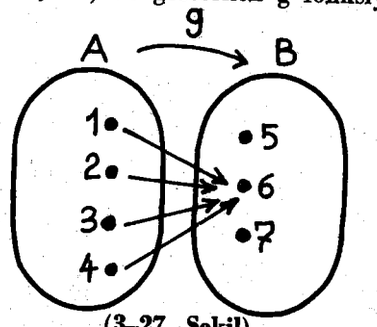
A tanım kümesinin farklı elemanlarının görüntüleri farklı olduğu için f bire-bir fonksiyondur. $f(A)=\{2, 5, 8, 11\}$ dir. $12 \in B$ olduğu halde $12 \notin f(A)$ olduğunu görüyorsunuz. f(A), B nin bir öz alt kümesi olduğundan f örten değildir. Örten olmayan fonksiyona kısaca **içine fonksiyon** diyeceğiz. Öyleyse, f bire-bir ve içine bir fonksiyondur. Bu f fonksiyonunun eleman sayısı ile A kümesinin eleman sayısını karşılaştırınız, ne görüyorsunuz? Sonlu bir A kümesinden B ye verilen f fonksiyonu için $s(f)=s(A)$ olacağına dikkat ediniz.

Birim Fonksiyon ve Sabit Fonksiyon

$A=\{-1, 0, 1, 2\}$ kümesini ve A dan A ya $f : x \to x$ fonksiyonunu alalım. Buna göre, $f(-1)=-1$, $f(0)=0$, $f(1)=1$ ve $f(2)=2$ olduğunu kolayca söyleyebilirsiniz.

Bunun gibi, $A \neq \emptyset$ olmak üzere A dan A ya, $f : x \to x$ kuralı ile verilen f fonksiyonuna **birim fonksiyon** denir.

Şimdi de, (3-27. Şekil) de gösterilen g fonksiyonuna bakınız.



(3-27. Şekil)

Burada, $\forall x \in A$ için $g(x)=6$ dır. Böyle, tanım kümesinin her elemanını aynı elemanla eşleyen bir fonksiyona da **sabit fonksiyon** denir.

3-7. Eşit Fonksiyonlar

$A=\{0, 1\}$ ve $B=\{2, 3\}$ olmak üzere,

$f : A \to B$, $f : x \to x+2$

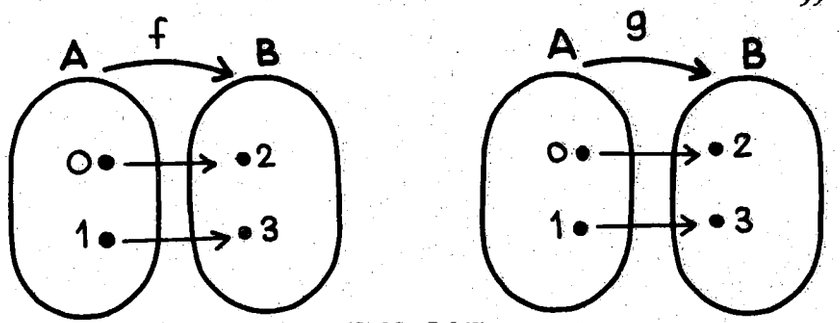
$g : A \to B$, $g : x \to x^2+2$

fonksiyonları verilsin. Buna göre,

$f(0)=0+2=2$, $\quad f(1)=1+2=3$

$g(0)=0^2+2=2$, $\quad g(1)=1^2+2=3$

olduğunu kolayca bulabilirsiniz, (3-28. Şekil).



(3-28. Şekil)

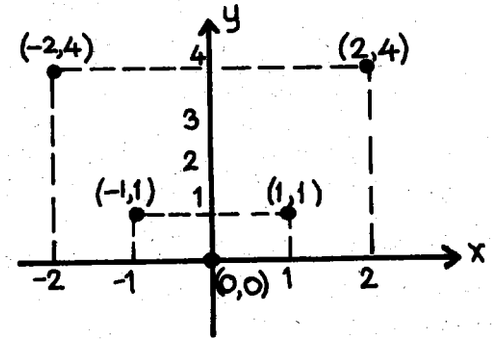
Burada, $\forall x \in A$ için, $f(x)=g(x)$ olduğunu görüyorsunuz. Böyle iki fonksiyona **eşit fonksiyonlar** denir ve $f=g$ biçiminde gösterilir.

Şimdi, bir fonksiyonun grafiğinin ne olduğunu açıklayalım. A'dan B'ye bir f fonksiyonu verilsin. $f=\{(x, y) | x \in A, y \in B$ ve $y=f(x)\}$ nin elemanlarına analitik düzlemde karşı gelen noktaların kümesine f fonksiyonunun grafiği denir.

3-21. Örnek

$A=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ den $B=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ kümesine verilen, $f : x \to x^2$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

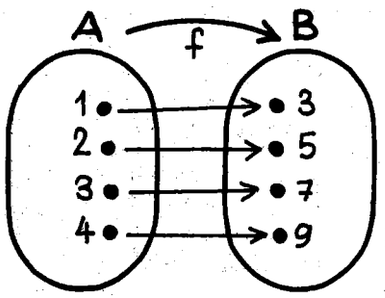
Çözüm : (3-29. Şekil) i inceleyiniz. f nin grafiğinin beş tane noktadan oluştuğuna dikkat ediniz.



(3-29. Şekil)

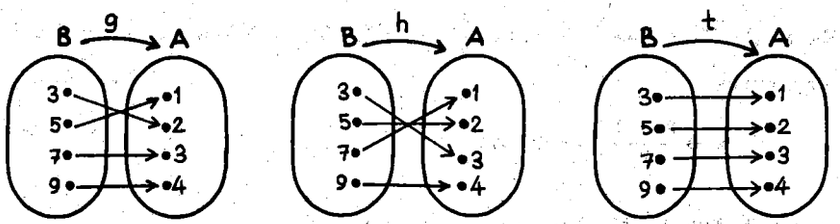
3-8. Ters Fonksiyon

$A=\{1, 2, 3, 4\}$ ve $B=\{3, 5, 7, 9\}$ kümeleri verilsin. A'dan B'ye $f : x \to 2x+1$ fonksiyonunu aşağıdaki şema ile gösterelim.



(3–30. Şekil)

Şimdi, B'yi tanım kümesi alarak B'den A'ya çeşitli fonksiyonlar düşününüz. Aşağıda, bunlardan üç tanesini görüyorsunuz.



(3–31. Şekil)

Bunlardan t fonksiyonuna dikkat ediniz. Her $(x, y) \in f$ için $(y, x) \in t$ dir, değil mi? Aşağıdaki tanımı okuyunuz.

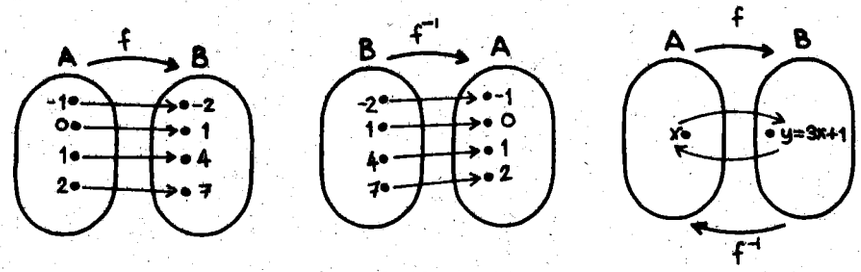
3–14. Tanım

f, A'dan B'ye bire–bir ve örten bir fonksiyon olsun. B'den A'ya bir t fonksiyonu, her $x \in A$ için $f(x)=y$ iken $t(y)=x$ koşulunu gerçekliyorsa, t fonksiyonuna f nin **tersi** denir. f nin tersi olan fonksiyon f^{-1} ile gösterilir.

3–22. Örnek

$A=\{-1, 0, 1, 2\}$ den $B=\{-2, 1, 4, 7\}$ ye verilen $f: x \to 3x+1$ fonksiyonunun ters fonksiyonu varsa, kuralını söyleyiniz.

Çözüm : f, bire–bir ve örten olduğu için tersi vardır. (3–32. Şekil) i inceleyiniz.



(3–32. Şekil)

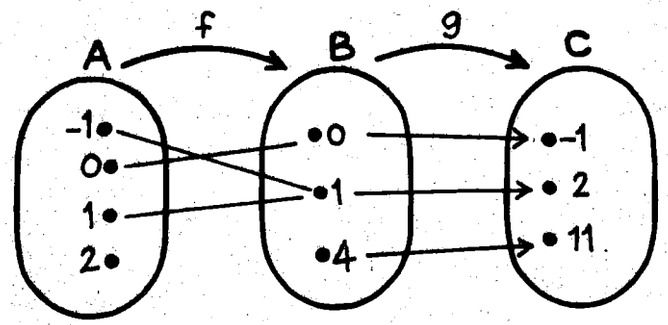
$f(x)=3x+1$ yani, $y=3x+1$ dir. Buradan, $x=\frac{y-1}{3}$ bulunur.

Şu halde, f^{-1}: $y \to \frac{y-1}{3}$ dür. B tanım kümesinin elemanlarını x ile gösterirsek,

$f^{-1}: x \to \frac{x-1}{3}$ yazabiliriz.

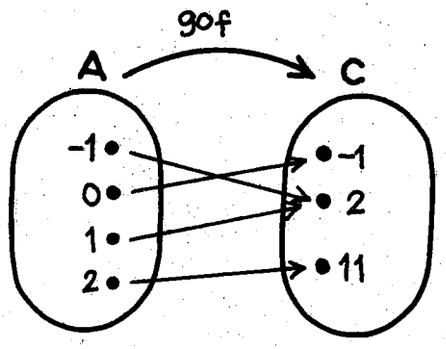
3–9. Bileşke Fonksiyon

$A=\{-1, 0, 1, 2\}$, $B=\{0, 1, 4\}$ ve $C=\{-1, 2, 11\}$ kümeleri ve $f: A \to B$, $f: x \to x^2$, $g: B \to C$, $g: x \to 3x-1$ fonksiyonları verilsin. Bu fonksiyonları aşağıdaki şema üzerinden izleyiniz.



(3–33. Şekil)

f ve g fonksiyonları ile A'nın elemanları C'nin elemanlarına aşağıdaki biçimde eşlenmektedir.



(3–34. Şekil)

Böylece, A'dan C'ye yeni bir fonksiyon oluşmuş bulunuyor. Bu fonksiyona, f ile g'nin bileşke fonksiyonu denir, gof biçiminde gösterilir ve "g bileşke f" diye okunur. (3–34. Şekil) de, (gof)(—1)=2, (gof) (0)=—1, (gof) (1)=2 ve (gof) (2)=14 olduğunu görüyorsunuz. İstersek, gof fonksiyonunun kuralını da şöyle bulabiliriz.

$$(gof)\ (x)=g\ (f(x))=g(x^2)=3x^2-1$$

dir. Şu halde, gof : $x\to 3x^2-1$ yazabiliriz. Buna göre, örneğin;

$$(gof)\ (-1)=3.(-1)^2-1=2 \quad \text{dir.}$$

Siz de, bu kuralı uygulayarak (gof) (0), (gof) (1) ve (gof) (2)'yi bulunuz. (gof) fonksiyonunda önce f nin sonra g nin uygulandığına dikkat ediniz. fog fonksiyonunda ise önce g sonra da f fonksiyonunun uygulandığına dikkat ediniz.)

3–23. Örnek

Z (tamsayılar kümesi) den Z ye, f : $x\to -2x+3$ ve g : $x\to x^2$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre, gof ve fog fonksiyonlarının kuralını bulalım ve bunlardan yararlanıp (gof) (—2) ile (fog) (—2) yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned}(gof)\ (x)&=g(f(x))\\&=g(-2x+3)\\&=(-2x+3)^2\\&=4x^2-12x+9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(fog)\ (x)&=f(g(x))\\&=f(x^2)\\&=-2x^2+3\end{aligned}$$

olarak bulunur. Şimdi; (gof) (—2) ve (fog) (—2) yi hesaplıyalım.

$(gof)\ (-2)=4\ (-2)^2-12\ (-2)+9=49$

$(fog)\ (-2)=-2\ (-2)^2+3=5$

dir. Bu örnekten, gof≠fog olduğunu söyleyebiliriz. Öyleyse, fonksiyonlar üzerinde tanımlanan bileşke işleminin değişme özeliği yoktur.

3–24. Örnek

f : $A\to B$, g : $B\to C$, h : $C\to D$

f : $x\to 2x$, g : $x\to -3x$, h : $x\to x-2$

fonksiyonları veriliyor. (fog)oh=fo(goh) olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}((fog)oh)\ (x)&=(fog)\ (h(x))\\&=f\ (g(h(x)))\\&=f\ (g(x-2))\\&=f(-3(x-2))\\&=f(-3x+6)\\&=2(-3x+6)\\&=-6x+12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(fo(goh))\ (x)&=f\ ((goh)\ (x))\\&=f\ (g(h\ (x)))\\&=f\ (g\ (x-2))\\&=f\ (-3\ (x-2))\\&=f(-3x+6)\\&=2(-3x+6)\\&=-6x+12\end{aligned}$$

dir. Öyleyse, (fog)oh=fo(goh) dir.

3–6. Alıştırmalar

1. Sınıfınızdan beş kişilik bir öğrenci kümesi yazınız. Bu kümeye A diyelim. B={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 , 9} alınız ve A'nın her elemanını okul numarasının birler basamağındaki rakama eşleyen fonksiyonu şema ile gösteriniz.

2. f : $A\to B$, f : $x\to \frac{1}{2}x+3$ fonksiyonu veriliyor. f örten bir fonksiyon ve A={—4, —2, 0, 3} olduğuna göre B'yi bulunuz.

3. A={3, 6, 8, 13, 15, 20} kümesinin her elemanını 5 ile bölmekle elde edilen kalanlara gönderen, örten fonksiyonu şema ile gösteriniz. Bu fonksiyon bire-bir midir?

4. A={1, 6} ve B={2, 7, 8} olmak üzere, A dan B ye,

f : $x\to x^2-6x+7$ ve g : $x\to x+1$

fonksiyonları veriliyor. f=g olup olmadığını söyleyiniz.

5. Z (tamsayılar kümesi) den Z ye, $f: x \to x^2$, $g: x \to -x+2$ ve $h: x \to 2x-1$ fonksiyonları veriliyor. Buna göre, aşağıdakileri hesaplayınız.

a) $f(-1)$, $f(0)$, $g(-1)$, $g(3)$, $h(0)$, $h(-3)$.

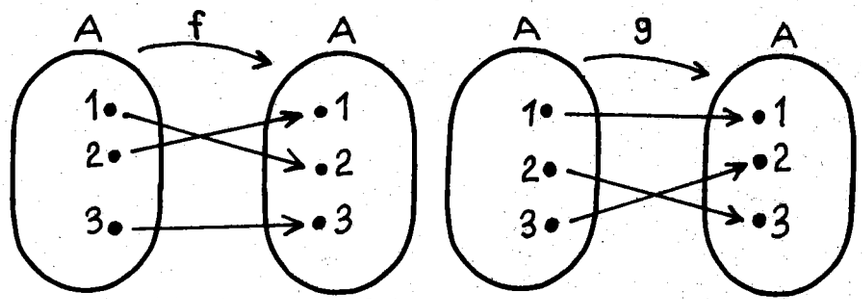
b) $(gof)(2)$, $(gof)(x)$, $(fog)(2)$, $(fog)(x)$, $(hof)(x)$, $(foh)(x)$, $(goh)(x)$.

c) $(gofoh)(-3)$, $(gofoh)(x)$, $(fogoh)(x)$, $(hogof)(x)$, $(hofog)(x)$.

6. $f: A \to B$, $f: x \to 2x-5$ ve $g: B \to C$, $g: x \to x+1$ olmak üzere f ve g örten fonksiyonları veriliyor. $B=\{-2, 0, 1, 3\}$ olduğuna göre A ve C kümelerini liste yöntemi ile yazınız.

7. f, A'dan B'ye bir fonksiyon ve B kümesi C'nin bir öz alt kümesi ise f, A'dan C'ye bir fonksiyondur diyebilir misiniz? Eğer, A, D'nin bir öz alt kümesi olursa, f, D'den B'ye bir fonksiyon olur mu?

8. $A=\{1, 2, 3\}$ kümesi veriliyor. A'dan A'ya aşağıdaki şemalarla verilen f, g fonksiyonlarını inceleyiniz.



(3–35. Şekil)

A sonlu bir küme olsun. A'dan A'ya bire–bir her fonksiyona A'nın bir **permütasyonu** denir. Yukarıdaki f ve g fonksiyonları A'nın permütasyonlarıdır. Bu permütasyonları,

$f=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$ ve $g=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$ biçimlerinde yazarız. Siz de, A'nın daha dört çeşit permütasyonunu yazınız, şemalarını çiziniz.

9. $s(A)=2$ ise A'nın kaç permütasyonu vardır.

10. $B=\{a, b, c, d\}$ ise B'nin kaç permütasyonu vardır. Bunlardan sekiz tanesini yazınız.

11. $A=\{1, 2, 3\}$ kümesinin $f=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ ve $g=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&2\end{pmatrix}$ permütasyonları veriliyor. A'nın öyle üç x, y, z permütasyonlarını bulunuz ki,

$$gof=x, \qquad goy=f \quad ve \quad zof=g$$

olsun.

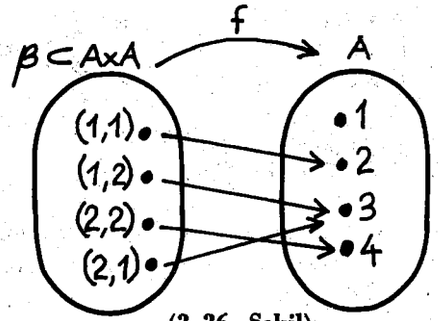
12. A'dan B'ye, $f: x \to 5x+2$ fonksiyonu veriliyor. f, bire–bir ve örten ise f^{-1} in kuralını söyleyiniz ve $f^{-1}(12)$, $f^{-1}(3)$ ve $f^{-1}(2)$ yi bulunuz.

3–10. İşlem

$3+4=7$ olduğunu biliyorsunuz. Eşitliğin solunda iki sayı olduğu halde, sağında bir sayı vardır. Eşitliğin solundaki iki sayıyı, (3 , 4) ikilisi biçiminde yazalım. Şimdi, bu ikiliyi 7'ye eşleyen bir f fonksiyonu düşünebilirsiniz. $f(3, 4)=3+4$ olur. Genel olarak, x ve y birer tamsayı olmak üzere, $f(x, y)=x+y$ yazabiliriz. Tamsayılarla yaptığımız, toplama, çıkarma, çarpma işlemlerinin, tamsayılar kümesinin kartezyen çarpımının bir alt kümesinden tamsayılar kümesine birer fonksiyon olduğunu sezebildiniz mi?

$A=\{1, 2, 3, 4\}$ olsun. AxA nın bir,

$\beta=\{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 1)\}$ alt kümesi verilsin. β dan A'ya (3–36. Şekil) deki şema ile belirtilen fonksiyonu gözönüne alalım.



(3–36. Şekil)

Bu f fonksiyonunun bildiğiniz toplama işlemi olduğunu görüyorsunuz. Şu halde bu işlemi yandaki tablo ile de gösterebiliriz.

+	1	2	3	4
1	2	3	.	.
2	3	4	.	.
3	.	.	.	.
4	.	.	.	.

Şimdi, A={a, b, c, d} kümesini alalım. AxA dan A'ya aşağıdaki tablo ile belirtilen fonksiyona dikkat ediniz. Bu fonksiyon "o" simgesi ile gösterilmiştir. Bu tablodan, Örneğin, aoa=b, aoc=d, cod=a olduğunu görünüz.

o	a	b	c	d
a	b	a	d	c
b	a	b	c	d
c	d	c	b	a
d	c	d	a	b

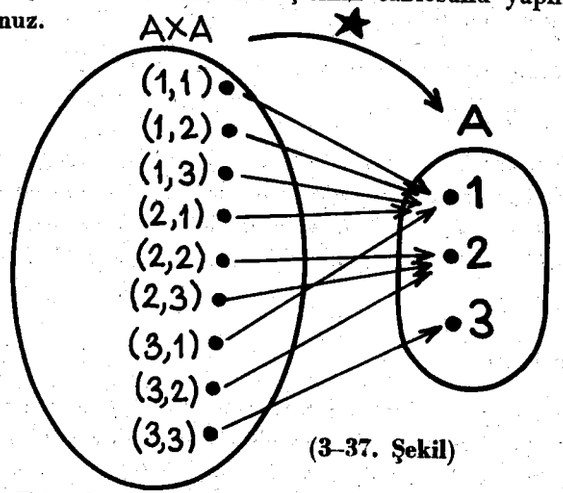
3–15. Tanım

Boş olmayan bir A kümesi verilsin. AxA nın bir alt kümesinden A'ya her fonksiyona, A'da **ikili işlem** veya kısaca **işlem** denir. Eğer, bu fonksiyon AxA dan A'ya ise A kümesi bu işleme göre **kapalıdır** denir.

Bu tanıma göre, A üzerinde bir "Δ" işlemi verildiğinde ∀x , y∈A için xΔy∈A oluyorsa A kümesi "Δ" işlemine göre kapalıdır diyebiliriz.

3–25. Örnek

A={1, 2, 3} olsun. (3–37. Şekil) deki şema ile belirtilen fonksiyon bir işlemdir. Neden? Bu işlemin tablosunu yapılmış olarak görüyorsunuz.

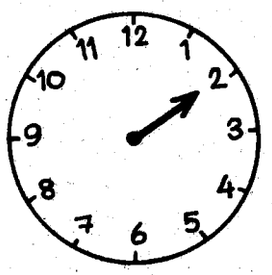


(3–37. Şekil)

★	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	2	3

Tablodan 2★3=2, 3★1=1 ve 1★3=1 olduğunu bulunuz. Bu işlem, AxA dan A'ya bir fonksiyon olduğu için A kümesi ★ işlemine göre kapalıdır, deriz. Şimdi, (3–36. Şekil) de belirtilen işleme tekrar bakınız.

Orada verilen işlem AxA nın bir öz alt kümesinden A'ya bir fonksiyon olduğundan A kümesi bu işleme göre kapalı değildir.



(3–38. Şekil)

(3–38. Şekil) de gördüğünüz saatin yalnız yelkovanı var. Yelkovanı önce 2'ye getirelim. Sonra 5 birim ileri alalım. Yelkovan 7'yi gösterir. Burada, A={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} kümesi üzerinde bildiğiniz toplama işleminden farklı bir toplama işlemi yapmış oluyoruz. Bu işlemi ⊕ simgesi ile gösterelim. 2⊕5=7 dir. Yelkovanı önce 4'e alıp, sonra 9 birim ileri alınız. Hangi sayıyı buldunuz? 4⊕9=1 değil mi? Şu halde, 6⊕8=2, 10⊕5=3 dür. Bu toplama işleminin tablosunu yapınız. Bu ⊕ işlemi AxA dan A ya bir fonksiyon olduğundan A kümesi ⊕ işlemine göre kapalıdır.

Şimdi de işlem tanımını gerçeklemeyen bir örnek verelim.

$$T=\{1, 3, 5, 7, \ldots\}$$

pozitif tek sayılar kümesini ele alalım. TxT den T ye toplama işlemi tanımlayabilir misiniz? İki tek sayının toplamının bir çift sayı olduğunu anımsayınız. Sözgelimi, (3 , 5) ∈ TxT olduğu halde, 3+5=8 dir ve 8 ∉ T dir. Öyleyse, 3–15. Tanım gereğince T kümesi üzerinde + (toplama) işlemi yoktur.

3–11. İşlemin Özelikleri

Yukarıdaki saat üzerinde öğrendiğimiz toplama işlemine göre, 8⊕7=7⊕8 dir. Her x, y ∈ A için x⊕y=y⊕x olduğunu söyleyebilirsiniz. Bildiğiniz çarpma işlemi için de elemanların yerleri değiştiğinde sonucun değişmediğini bilirsiniz. Sözgelimi, 2.3=3.2 dir. Bazı işlemlerde ise bu yer değiştirme, sonucu etkiler. Örneğin, $3^2=9$ olduğu halde $2^3=8$ dir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki tanımı veriyoruz.

3–16. Tanım

A Kümesinde bir "o" işlemi verilsin. Her x, y∈A için, xoy=yox oluyorsa "o" işleminin **değişme** özeliği vardır, denir.

Her A, B kümeleri için, A∪B=B∪A, A∩B=B∩A olduğunu hatırlayınız. Şu halde, ∪ ve ∩ işlemlerinin değişme özelikleri vardır. Kartezyen çarpımın değişme özeliği yoktur. Neden?

3–26. Örnek

Tam sayılar kümesi üzerinde verilen, xoy=2x+y biçiminde tanımlı "o" işleminin değişme özeliği var mıdır?

Çözüm : x=3, y=5 alalım.

$$3o5=2.3+5=11 \text{ ve } 5o3=2.5+3=13$$

olduğundan, 3o5≠5o3 yazabiliriz. Şu halde, bu işlemin değişme özeliği yoktur.

x, y, z birer tamsayı olduğuna göre,

$$x+(y+z)=(x+y)+z \text{ ve } x.(y.z)=(x.y).z$$

olduğunu biliyorsunuz. Sözgelimi, $3+(5+8)=(3+5)+8$ ve $15.(6.7)=(15.6).7$ yazabiliriz. Bu nedenle, tamsayılar kümesi üzerinde "+" ve "." işlemlerinin birleşme özeliği vardır, diyeceğiz.

3–17. Tanım

A kümesinde bir "o" işlemi verilsin. Her, x, y, z∈A için,

$$xo(yoz)=(xoy)oz$$

oluyorsa "o" işleminin **birleşme** özeliği vardır, denir.

3–27. Örnek

Tamsayılar kümesi üzerinde verilen, xoy=x+y—xy biçiminde tanımlı "o" işleminin birleşme özeliği var mıdır?

Çözüm : Tamsayılar kümesini Z ile gösterelim. x, y, z∈Z için,

$$xo(yoz) = xo(y+z-yz) = x+(y+z-yz)-x(y+z-yz) = x+y+z-yz-xy-xz+xyz$$

$$(xoy)oz = (x+y-xy)oz = x+y-xy+z-(x+y-xy)z = x+y+xy+z-xz-yz+xyz$$

olduğundan, xo(yoz)=(xoy)oz dir. Şu halde "o" işleminin birleşme özeliği vardır.

Şimdi de, aynı küme üzerinde verilen iki işlemle ilgili olarak aşağıdaki tanımı veriyoruz.

3–18. Tanım

A Kümesi üzerinde farklı iki, "o" ve "Δ" işlemleri verilsin. Her, x, y, z∈A için.

$$xΔ(yoz)=(xΔy)o(xΔz)$$

oluyorsa, Δ işleminin, o işlemi üzerine **dağılma** özeliği vardır.

Sözgelimi, her p, q, r önermeleri için, $p\vee(q\wedge r)=(p\vee q)\wedge(p\vee r)$ olduğunu biliyorsunuz. Şu halde, ∨ işleminin ∧ işlemi üzerinde dağılma özeliği vardır. Bunun gibi çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özeliği olduğunuda söyleyebilirsiniz. Oysa, toplama işleminin çarpma işlemi üzerine dağılma özeliği yoktur, neden?

3–12. Birim (Etkisiz) Eleman – Ters Eleman

A={0, 1, 2, 3} kümesi üzerinde yandaki tablo ile verilen ⊕ işlemini inceleyiniz. Burada,

$$0⊕0=0,\ 0⊕1=1⊕0=1,$$

"0⊕2=2⊕0=2" ve "0⊕3=3⊕0=3"

dür. Yani, ∀x∈A için, x⊕0=0⊕x=x yazabiliriz.

⊕	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Bildiğiniz çarpma işlemini düşünelim. Her x tamsayısı için 1.x=x.1=x dir, değil mi? Aşağıdaki tanımı dikkatle okuyunuz.

3–19. Tanım

Bir A kümesi üzerinde bir "o" işlemi verilsin. Her x∈A için, xoe =eox=x koşulunu gerçekleyen bir e∈A varsa bu "e" elemanına, "o" işleminin **birim (etkisiz)** elemanı denir.

Örneğin, her A kümesi için, A∪∅=∅∪A=A olduğundan, ∪ işleminin birim elemanı ∅ dir. Bildiğiniz toplama işleminin birim elemanının "0", çarpma işleminin birim elemanının da 1 olduğunu söyleyebilirsiniz.

Şimdi de, ters elemanın ne olduğunu görelim. Sözgelimi, 3+(—3)= (—3)+3=0 dır. (sıfırın toplama işleminin birim elemanı olduğunu hatırlayınız.) Bu özelikten dolayı "3" ün toplama işlemine göre tersi "—3" tür diyeceğiz.

3–20. Tanım

Bir A kümesi üzerinde bir "o" işlemi verilsin. Bu işlemin birim elemanı e olsun. Her $x \in A$ için, $xoy=yox=e$ koşulunu gerçekleyen bir $y \in A$ varsa bu y elemanına x'in "o" işlemine göre **tersi** denir.

Çarpma işleminin birim elemanının 1 olduğunu biliyorsunuz. Söz gelimi, $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1$ olduğu için $\frac{3}{5}$ in çarpma işlemine göre tersi $\frac{5}{3}$ tür, deriz. $\frac{5}{3}$ ün çarpma işlemine göre tersi de $\frac{3}{5}$ tir. Neden?

3–28. Örnek

A={a, b, c, d} kümesi üzerinde yandaki tablo ile belirlenmiş "o" işlemini görüyorsunuz.

o	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

(1) Bu işlemin birim elemanı var mıdır? Varsa nedir?

(2) A'nın her elemanının "o" işlemine göre tersleri varsa söyleyiniz.

Çözüm :

(1) Tablodan, aoc=coa=a, boc=cob=b, coc=c, ve doc=cod=d olduğunu görünüz. Şu halde, $\forall x \in A$ için, xoc=cox=x olduğundan "o" işleminin birim elemanı c'dir.

(2) (aoa =c) ⇒ a nın "o" işlemine göre tersi a dır.

(bod=dob=c) ⇒ b nin "o" işlemine göre tersi d,
d nin "o" işlemine göre tersi b'dir.

(coc =c) ⇒ c nin "o" işlemine göre tersi c dir.

3–7. Alıştırmalar

1) Tamsayılar kümesi, çıkarma işlemine göre kapalı mıdır? Çıkarma işleminin, tamsayılar kümesi üzerinde değişme ve birleşme özelikleri var mıdır? Cevabınızın sebebini açıklayınız.

2) A={1, 2, 3, ...} kümesi üzerinde verilen $xoy=y^x$ işleminin değişme ve birleşme özelikleri olmadığını gösteriniz.

3) A={—1, 0, 1} kümesi üzerinde çarpma işlemi veriliyor.

a) Çarpma işleminin tablosunu yapınız.
b) A kümesi çarpma işlemine göre kapalı mıdır?
c) Çarpma işleminin birim (etkisiz) elemanı nedir?
d) Çarpma işlemine göre —1'in tersi nedir? 1'in tersi nedir? Sıfırın tersi var mıdır?

4) A={0, 1, 2, 3, 4} kümesi üzerinde,

"xoy=x+y nin 5 ile bölümünden kalan"

biçiminde tanımlı bir "o" işlemi veriliyor.

a) "o" işleminin tablosunu yapınız.
b) A kümesi o işlemine göre kapalı mıdır?
c) "o" işleminin değişme özeliği var mıdır?
d) "o" işleminin birleşme özeliği var mıdır?
e) "o" işleminin birim (etkisiz) elemanı var mıdır?
f) "o" işlemine göre 2'nin tersi nedir? 4'ün tersi nedir?

5) Tamsayılar kümesi üzerinde, xoy=3x+2y biçiminde tanımlı bir "o" işlemi veriliyor. Bu işlemin değişme ve birleşme özelikleri olmadığını gösteriniz.

6) Tamsayılar kümesi üzerinde, çarpma işleminin, beşinci alıştırmada verilen "o" işlemi üzerine dağılma özeliği olduğunu gösteriniz. "o" işleminin de çarpma işlemi üzerine dağılma özeliği var mıdır?

7) Bir A kümesi üzerinde bir "o" işlemi veriliyor.

a) "o" işleminin birim elemanının en çok bir tane olduğunu gösteriniz.

b) "o" işleminin birleşme özeliği ve birim elemanı varsa her $x \in A$ nın en çok bir tane tersi olduğunu gösteriniz.

c) A kümesi "o" işlemine göre kapalı ve "o" işleminin birleşme özeliğinin olduğu biliniyor. Eğer, "o" işlemine göre birim eleman ve A'nın her elemanının tersi varsa, her x, $y \in A$ için, $(xoy)^{-1}=y^{-1}ox^{-1}$ olduğunu gösteriniz.

8) A={B,U,R,S,A} kümesi üzerinde verilen Δ işlemi aşağıdaki tablo ile belirtiliyor.

Δ	B	U	R	S	A
B	S	A	B	U	R
U	A	B	U	R	S
R	B	U	R	S	A
S	U	R	S	A	B
A	R	S	A	B	U

a) A kümesi Δ işlemine göre kapalı mıdır?

b) Δ işleminin birim elemanı var mıdır? Varsa hangisidir?

c) A nın elemanlarının tersleri varsa söyleyiniz.

d) Δ işleminin değişme ve birleşme özeliklerinin olup olmadığını araştırınız.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜMLE İLGİLİ TESTLER

1) (2m+1, m+n)=(—7, 2) olduğuna göre (n, m) sıralı ikilisi aşağıdakilerden hangisidir?

a) (—4, 6) b) (6, —4) c) $(\frac{3}{2}, -1)$

d) (—1, 6) e) (—4, —6)

2) C={—2, 3} ve D={a, b} olduğuna göre DxC kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a) {(—2, a), (—2, b), (a, 3), (3, b)}

b) {(a, —2), (b, 3), (a, 3), (—3, b)}

c) {(b, 3), (a, —2), (b, —2), (a, 3)}

d) {(—2, 3), (a, 3), (b, 3)}

e) {Ø}

3) A={1, 2, 3} üzerinde verilen aşağıdaki bağıntılardan hangisi yansıyan değildir?

a) {(1, 1), (3, 3), (1, 2), (2, 2)}

b) {(3, 3), (1, 1), (2, 2)}

c) {(3, 1), (1, 2), (3, 3), (2, 2)}

d) {(1, 1), (3, 1), (2, 2), (3, 3)}

e) {(3, 3), (3, 2), (1, 1), (2, 2)}

4) A={a, b, c} üzerinde verilen aşağıdaki bağıntılardan hangisi hem simetrik değil hem de ters-simetrik değildir?

a) {(a, c), (c, a), (b, b), (b, a)}

b) {(a, a), (b, b)}

c) {(a, c), (c, a)}

d) {(a, a), (a, b), (c, a)}

e) {(a, c), (c, b), (b, c)}

5) 19≡k(mod 6) de k nın yerine aşağıdaki sayılardan hangisi yazılabilir?

a) 0 b) 1 c) 3 d) 4 e) 5

6) A={—2, 0, 3} kümesi veriliyor. f : x→ $-x^2+x$ fonksiyonu A kümesini aşağıdakilerden hangi kümeye eşler?

a) {—6, 0} b) {—6, 0, 7} c) {—4, 0, 6}

d) {—1, 0, 2} e) {2, 3, 7}

7) f : x→3x—1 ve g : x→$\frac{1}{2}x^2$ olduğuna göre, (fog) (—2) nin değeri aşağıdakilerden hangisidir?

a) —6 b) —5 c) 6 d) 5 e) $\frac{9}{2}$

8) $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$ ve $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$ olduğuna göre, gof permütasyonu aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$

9) xoy=x^y—x olduğuna göre, 3o4 ün değeri aşağıdakilerden hangisidir?

a) 77 b) 68 c) 64 d) 58 e) 54

10) Aşağıda verilen işlemlerden hangisinin birleşme özeliği yoktur?

a) Toplama işlemi b) Çarpma işlemi

c) Bölme işlemi d) U işlemi e) $\vee$ işlemi

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

DOĞAL SAYILAR, TAMSAYILAR, MODÜLER ARİTMETİK VE MATEMATİK SİSTEMLER

Bu bölümde sayıları inceliyeceğiz. Saymayı, ilkokula başlamadan öğrendiniz. İlk ve ortaokulda sayılarla işlemler yaptınız. İşte bu bölümde, üzerinde işlemler tanımlayıp kullandığınız doğal ve tamsayılar kümelerinin kuruluşlarını inceliyecek ve tanıdığınız işlemlere ait özelikleri göreceksiniz.

4–1. Doğal Sayılar

İlkokul çağından öncesini hatırlayınız veya küçük kardeşleriniz varsa onlar üzerindeki gözlemlerinizi düşününüz. Konuşmayı yeni öğrenen çocukta sayı fikri yoktur. Bu yaştaki çocuğun oynamakta olduğu beş bilyadan ikisini saklasanız farkına varmaz. Çocuk yapayalnız büyüseydi sayıları ve saymasını bilmeyecekti. Demek ki sayı, toplumun yapısı ve kültürün bir parçasıdır. Yani insanlar olmasaydı, sayılar da olmazdı.

İlkel toplumlarda sayı fikri tam olarak gelişmemiştir. Böyle toplumlar "beş koyun", beş keçi" için ayrı deyimler kullanmışlar ve soyutlama yolu ile bu deyimlerden beş kavramına varamamışlardır.

Acaba saymayı bilmeden, iki elimizde aynı sayıda parmak olduğunu söyleyebilir miyiz? Saymayı bilmediğimize göre avuçlarımızı birbirine yapıştırırız. Böylece iki elin parmakları bire–bir karşılaşmış olur. Her iki elimizde de açıkta kalan parmak olmadığına göre iki elimizde de aynı sayıda parmak olduğunu söyleyebiliriz.

Çoğumuz eşyadan ayrı, soyut sayı kavramına eşlemeler yolu ile varmışızdır. İnsanlık tarihinde sayı kavramının gelişmesi de böyle olmuştur. Saymayı bilmeyen bir çoban sabahleyin sürüsünü otlatmak üzere ağıldan çıkarırken her hayvan için küçük bir çukura bir taş atmak ve akşam dönüldüğünde ağıla giren her hayvan için bu taşlardan birini çukurdan çıkarmak yoluyla sürüsünün tamamının ağıla dönüp dönmediğini kontrol edebilir. Benzer biçimde ilkel bir toplumdaki avcı da

avladığı her hayvan için bir ağaç gövdesine veya bir sopaya bıçağı ile bir işaret kazıyabilir. Çobanın sürüsündeki hayvanlarla çukura attığı taşlar arasında bire–bir eşleme kurduğuna dikkat ediniz. İlkel avcı da, avladığı hayvanlarla, sopasına ya da bir ağaç gövdesine kazıdığı işaretler arasında bire–bir eşleme kurmuştur. O halde sayıları, aralarında bire–bir eşleme olan kümelerin ortak özeliği olarak düşünebiliriz. Örneğin, beş sayısını beşer elemanlı kümelerin ortak özeliği olarak düşüneceğiz. Doğal sayıların iyi bir tanımını verebilmek için ilgili bazı tanımları vermemiz gerekiyor.

4–1. Tanım

Hiç bir öz alt kümesi ile bire–bir eşlenemiyen kümelere **sonlu küme** denir. Sonlu olmayan yani en az bir alt kümesi ile eşlenebilen kümelere de **sonsuz küme** denir.

Söz gelimi,

$A \subset \{a, b, c\}$ kümesi sonludur. Çünkü bu kümenin elemanları, öz alt kümeleri olan,

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$$

kümelerinden hiçbirinin elemanları ile bire–bir eşlenemez. (Bunun olanaksızlığını kendiniz deneyiniz.) Sonsuz kümelere ait örnekleri doğal sayılar kümesinin sonunda bulacaksınız.

Sonlu kümeler için aşağıdaki önermelerin doğruluğunu ispatsız kabul edebilirsiniz :

i) A sonlu küme, $B \subset A$ ise B de sonlu kümedir.

ii) A veya B sonlu küme ise $A \cap B$ de sonlu kümedir.

iii) A ve B sonlu küme ise $A \cup B$ de sonlu kümedir.

iv) A ve B sonlu küme ise $A \times B$ de sonlu kümedir.

Boş küme, öz alt kümesi olmadığı için sonlu kümedir.

Sonlu kümeler arasında bire–bir eşleme bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösterebilirsiniz.

4–2. Tanım

Sonlu kümelerin bire–bir eşleme bağıntısına göre denklik sınıflarının herbirine bir **doğal sayı** denir.

Bu tanıma göre, sonlu kümeler üzerindeki bire–bir eşleme bağıntısı ile birbirine bağlı olan kümelerden oluşan denklik sınıflarına doğal

sayı diyoruz. Örneğin, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\text{Ahmet, Sedat, Salim}\}$ ve $C = \{\Delta, O, \square\}$ kümeleri aynı denklik sınıfında bulunurlar. (Bu sınıfta bulunan başka kümeler söyleyiniz.) Bu denklik sınıfını 3 sembolü ile göstereceğiz.

$\emptyset$ kümenin bulunduğu denklik sınıfını 0,

Bir elemanlı kümelerin bulunduğu denklik sınıfını 1,

İki elemanlı kümelerin bulunduğu denklik sınıfını 2,

Üç elemanlı kümelerin bulunduğu denklik sınıfını 3,

.....

sembolleri ile gösterelim. Böylece doğal sayılar kümesini elde etmiş oluruz. Doğal sayılar kümesini N ile göstereceğiz.

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$\{1, 2, 3, \ldots\}$ kümesinin sayma sayıları kümesi olduğunu biliyorsunuz. Bunu da N^+ kümesi olarak göstereceğiz.

İlkokul sıralarından beri doğal sayıları tanır, doğal sayılarla nasıl toplama, çıkarma, çarpma ve bölme yapıldığını da bilirsiniz. Şimdi bu işlemlerin bazı özeliklerini inceliyelim.

İki doğal sayının toplamı yine bir doğal sayı mıdır?

İki doğal sayının çarpımı yine bir doğal sayı mıdır?

O halde doğal sayılar kümesi toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır.

a ve b iki doğal sayı ise a–b daima bir doğal sayı mıdır? (2–5 in bir doğal sayı olmadığını görünüz.)

a ve b birer doğal sayı ise $\frac{a}{b}$ daima bir doğal sayı mıdır? $\left(\frac{2}{3}\right.$ bir doğal sayı mıdır?$\left.\right)$

O halde doğal sayılar kümesi, çıkarma ve bölme işlemlerine göre kapalı değildir.

4–1. Alıştırmalar

Aşağıda elemanları doğal sayı olan bazı kümeler verilmiştir. Bu kümelerin her birinin toplama, çarpma ve bölmeye göre kapalı olup

olmadıklarını araştırınız. (Bir doğal sayının iki katının çift sayı olduğunu hatırlayınız.)

1. Çift doğal sayılar kümesi,
2. Tek doğal sayılar kümesi,
3. {1, 2, 3, 4, 5, 6}
4. {0, 1}
5. 20'den büyük doğal sayılar kümesi.

Bir doğal sayıyı türlü biçimlerde ifade edebiliriz. Sözgelimi 5 doğal sayısını, 4+1, 3+2 veya 2.2+1 biçimlerinde gösterebiliriz. Bunların hepsinin aynı bir sayıyı gösterdiğine dikkat ediniz. Bu bağıntıya eşitlik deriz, ve bunu "=" işareti ile gösteririz. Örneğin,

$$5=4+1=3+2=2.2+1$$

eşitliklerini yazabiliriz.

Şimdi doğal sayılarda eşitliklere ilişkin özelikleri yazalım. $\forall a, b, c \in N$ için,

1) $a=a$ (Her doğal sayı kendine eşittir) (Yansıma),
2) $a=b$ ise $b=a$ dır. (Simetri),
3) $(a=b$ ve $b=c) \Rightarrow a=c$ dir. (Geçişme),
4) $a=b \Leftrightarrow a+c=b+c$ dir. (Bir sayı ile toplama veya sadeleşme özeliği),
5) $a=b \Leftrightarrow a.c=b.c, (c\neq 0)$ (Bir sayı ile çarpma veya sadeleşme özeliği).

Doğal Sayılarda Toplamaya İlişkin Özelikler

$\forall a, b, c \in N$ için,

1) $a+b=b+a$	(Toplamanın değişme özeliği)	(TD)
2) $a+(b+c)=(a+b)+c$	(Toplamanın birleşme özeliği)	(TB)
3) $(a+c=b+c) \Rightarrow a=b$	(Toplamanın sadeleşme özeliği)	(TS)
4) $a+0=0+a=a$	(Toplamada sıfırın birim özeliği)	(SB)

Doğal Sayılarda Çarpmaya İlişkin Özelikler

$\forall a, b, c \in N$ için,

1) $a.b=b.a$	(Çarpmanın değişme özeliği)	(ÇD)
2) $a(b.c)=(a.b)c$	(Çarpmanın birleşme özeliği)	(ÇB)
3) $c\neq 0, a.c=b.c \Rightarrow a=b$ dir.	(Çarpmanın sadeleşme özeliği)	(ÇS)
4) $a.1=1.a=a$	(Çarpmada bir'in birim özeliği)	(BB)
5) $a.0=0.a=0$	(Sıfırın yutan eleman olma özeliği)	(SY)
6) $a(b+c)=a.b+a.c$	(Çarpmanın toplama üzerine dağılma özeliği)	(D)

Bu özeliklerin kullanılmaları ile ilgili aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

4–1. Örnekler

a) $8+2=2+x$ açık önermesinin doğruluk kümesinin bulunması,

$8+2=2+x$
$8+2=x+2$ (TD)
$8=x$ (TS)
Doğruluk kümesi {8} dir.

b) $(x+7)+3=12$ açık önermesinin doğruluk kümesinin bulunması,

$(x+7)+3=12$
$x+(7+3)=12$ (TB)
$x+10=2+10$
$x=2$ (TS)
Doğruluk kümesi {2} dir.

c) $x+8=5$ açık önermesinin doğruluk kümesinin bulunması,

$x+3+5=5+0$ (Tanım)
$x+3=0$ (TS)
Doğal sayılar kümesinde böyle bir x sayısı yoktur.
Doğruluk kümesi Ø dir.

d) Çarpmanın toplama üzerine dağılma özeliğinin a(b+c+d) çarpımına da uygulanabileceğinin gösterilmesi,

$$\begin{aligned} a(b+c+d) &= a[(b+c)+d] && \text{(Tanım)} \\ &= a(b+c)+ad && \text{(D)} \\ &= (ab+ac)+ad && \text{(D)} \\ &= ab+ac+ad \end{aligned}$$

4–2. Alıştırmalar

1) Aşağıdaki önermelerin her birinde doğal sayıların hangi özelikleri gösterilmiştir? (Harflerin tümü doğal sayıları göstermektedir).

a) $8+5=5+8$

b) $7(x+4)=7x+28$

c) $8(4.3)=(8.4)3$

d) $a(b+c)=ab+ac$

e) $5.35=150+25$

f) $18(x+2)=(18x+25)+11$

2) Doğal sayıların özeliklerini kullanarak aşağıdaki önermelerin bütün doğal sayılar için doğru olduğunu gösteriniz.

a) $(x+y)z=xz+yz$

b) $a+ab=a(1+b)$

c) $x[y+(v+z)]=x(y+v)+x.z$

d) $(a+b+c)x=ax+bx+cx$

Şimdi de, a+a+a gibi bir doğal sayının birkaç defa kendisi ile toplamının sonucunu inceliyelim.

i) $\begin{aligned} a+a &= a.1+a.1 && \text{(BB)} \\ &= a(1+1) && \text{(D)} \\ &= 2a && \text{(Tanım)} \end{aligned}$

ii) $\begin{aligned} a+a+a &= a.1+a.1+a.1 && \text{(BB)} \\ &= a(1+1+1) && \text{(D)} \\ &= 3a && \text{(Tanım)} \end{aligned}$

4–3. Tanım

i) $x \in N$ ve $n \in N^+$ için,

$$\underbrace{x.x.x. \ldots x}_{n \text{ tane}} = x^n$$

ii) $x \in N^+$ için,

$$x^\circ = 1 \text{ dir.}$$

NOT : $x^1 = x$ olduğuna ve 0° ın tanımlanmadığına dikkat ediniz.

4–2. Örnek

Doğal sayılarda toplama ve çarpmaya ilişkin özelikleri kullanarak $x, y \in N$ için,

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$

olduğunu kanıtlayınız.

İspat :

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= (x+y)\ (x+y) && \text{(Tanım)} \\ &= (x+y)x+(x+y)y && \text{(Dağılma özeliği)} \\ &= x.x+y.x+x.y+y.y && \text{(Dağılma özeliği)} \\ &= x^2+xy+xy+y^2 && \text{(Tanım, değişme özeliği)} \\ &= x^2+2xy+y^2 && \text{(Tanım)} \end{aligned}$$

4–1. Teorem

Her x, y, n, $m \in N$ ve $x \neq 0$, $y \neq 0$ için

i) $x^n.x^m = x^{n+m}$

ii) $(x^m)^n = x^{m.n}$

iii) $(x.y)^m = x^m.y^m$ dir.

İspat :

i) $\begin{aligned} x^n.x^m &= \underbrace{(x.x.x.\ldots.x)}_{n \text{ tane}}\ \underbrace{(x.x.x. \ldots .x)}_{m \text{ tane}} && \text{(Tanım)} \\ &= \underbrace{x.x.x. \ldots .x}_{m+n \text{ tane}} && \text{(Birleşme)} \\ &= x^{m+n} \end{aligned}$

ii) $(x^m)^n = x^m.x^m.x^m. \ldots .x^m$ (Tanım)

$= \underbrace{x^{m+m+m+\ldots+m}}_{n \text{ tane}}$ ((i) den)

$= x^{m.n}$ (Tanım)

iii) Bu kanıtlamayı da aynı biçimde siz yapınız.

4–3. Alıştırmalar

1. Doğal sayıların toplama ve çarpmaya ilişkin özeliklerinden yararlanarak aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız.

$\forall x, y \in N$ için,

a) $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

b) $(x+3)^2 = x^2+6x+9$

c) $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

d) $(x+1)^2 = x^2+2x+1$

2. Doğal sayıların özeliklerini ve çarpmanın toplama üzerine dağılma özeliğini kullanarak aşağıdaki ifadeleri tek bir terim haline getiriniz.

a) $2a+2b$

b) $3(5x+1)+5(5x+1)$

c) $x(4+v)+x(u+v)$

d) $(2y+1)\ (y+1)+(1+2y)\ (1+y)$

3. Doğal sayılar kümesi üzerinde verilen aşağıdaki açık önermelerin doğruluk kümelerini bulunuz.

a) $y+3=5$

b) $x+4=2$

c) $2x=4$

d) $2x+1=4+3x$

e) $2x+5=7$

f) $2y+1=4$

g) $3a+5=15$

h) $3y+1=2y+4$

4. Çift bir doğal sayının karesinin yine bir çift doğal sayı olduğunu kanıtlayınız.

(Yol gösterme : a çift bir sayı ise $a=2x$, $x \in N$ dir.)

5. Tek bir doğal sayının karesinin yine tek bir doğal sayı olduğunu kanıtlayınız.

(Yol gösterme : a tek bir sayı ise $a=2x+1$, $x \in N$ dir.)

6. Doğal sayıların özeliklerini kullanarak aşağıdaki ifadeleri parantezlerden kurtarınız ve her adımda hangi özeliği kullandığınızı belirtiniz.

a) $3x(4+y)$

b) $(2a+5)\ (a+6)$

c) $(2+1)\ (3z+1)$

d) $(a+1)\ (a+b+c)$

e) $3(x+1)=2(x+4)$

f) $5(x+y+z)+4(x+5)+7y$

Doğal Sayılar Kümesinde Sıralama

Doğal sayılar kümesinin belirli bir sıra içinde oluştuğunu biliyorsunuz. İlk önce 0, sonra 1, sonra 2, sonra 3, v.b., saymada da bu sırayı izleriz. Bir a sayısı sayma sırasında bir b sayısından önce geliyorsa "a, b den küçüktür" der ve bunu $a<b$ biçiminde yazarız. $a<b$ yi "b, a dan büyüktür" diye de söyler ve $b>a$ biçiminde de yazarız. O halde $a<b$ ve $b>a$ tamamen aynı anlamdadır. Bu ifadelerin $a+c=b$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı bir c doğal sayısının var olduğu anlamında olduğuna dikkat ediniz.

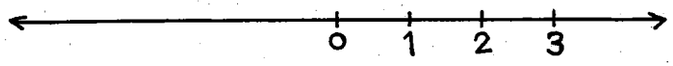
4–4. Tanım

a, b, c doğal sayılar olduğuna göre,

$c=0$ için $a+c=b \Rightarrow a=b$,

$c \in N^+$ için $a+c=b \Rightarrow a<b$ dir.

Doğal sayılar kümesinde en küçük eleman nedir? Bu elemandan başlayarak doğal sayıları bir doğru üzerine eşit aralıklarla sıralayınız. (4–1. Şekil) e dikkat ediniz.



(4–1. Şekil)

O başlangıç noktasından başlanarak, doğal sayıların doğrunun tek bir yönünde sıralanabildiğini görünüz. Bunun gibi üzerinde sayıların sıra ile yazılı olduğu doğruya **sayı ekseni** denir. Doğal sayılar kümesinin bulunduğu bu sayı ekseninin başlangıç noktasının sıfır olduğunu biliyorsunuz. Bitim noktasına ilişkin ne düşünüyorsunuz, böyle bir nokta var mıdır?

Sıralamanın Özelikleri

1. Verilmiş herhangi iki a ve b doğal sayı çifti için aşağıdaki üç durumdan ancak biri doğrudur.

$a=b,\ a<b,\ b<a$ (Üç hal kuralı)

2. $a<b,\ b<c \Rightarrow a<c$ dir. Geçişme özeliği)

3. $a<b \Leftrightarrow a+c<b+c$ dir (Bir sayı ile toplama özeliği)

4. $a<b,\ c<d \Rightarrow a+c<b+d$ (Eşitsizliklerin toplama özeliği)

5. $a<b,\ c\in N^+ \Rightarrow ac<bc$ (Bir sayma sayısı ile çarpma özeliği)

Sıralama tanımı ve doğal sayıların özeliklerini kullanarak yukarıdaki özelikleri ispatlama olanağı vardır. Biz bu özelikleri ispatsız olarak veriyoruz.

1. Özelikte hallerden biri doğru iken diğer ikisinin doğru olamıyacağına dikkat ediniz. $b<a$ yanlış ise ya $a<b$ ya da $a=b$ dir. Bunu kısaca $a\leqslant b$ biçiminde yazarız. $a\neq b$ ise "$a<b$ veya $a>b$" dir.

2. Özelikte ise $a<b$ ve $b<c$ ise bunu genellikle $a<b<c$ biçiminde yazarız.

3. Özelikte bir eşitsizliğin iki tarafına bir doğal sayı ekleyebildiğimiz gibi aynı bir doğal sayı ile sadeleştirebildiğimize dikkat ediniz.

4. Özelik, iki eşitsizliğin küçük yanlarının toplamının büyük yanlarının toplamından küçük olduğunu gösterir.

5. Özelik, bir eşitsizliğin iki yanının aynı bir sayma sayısı ile çarpılacağını gösterdiği gibi, her iki yanı bir sayma sayısı ile çarpılmış ise sadeleşebileceğini de gösterir.

4–3. Örnekler

1) $x+3<8$ açık önermesinin doğal sayılar kümesinde çözümünü bulunuz.

Çözüm : $x+3<5+3$ (Tanım)

$x<5$ (Sadeleştirme)

veya,

$D=\{0, 1, 2, 3, 4\}$ dir.

2) $6a+3\leqslant 15$ $(a\in N)$ çözüm kümesinin bulunması.

Çözüm : $6a+3\leqslant 12+3$ (Tanım)

$6a\leqslant 12$ (Toplamanın sadeleşme özeliği)

$6a\leqslant 6.2$ (Tanım)

$a\leqslant 2$ (Çarpmanın sadeleşme özeliği)

veya,

$D=\{0, 1, 2\}$ dir.

3) $5x+3\leqslant 4x+4$ $(x\in N)$ çözüm kümesinin bulunması.

Çözüm : $(4+1)x+3\leqslant 4x+1+3$ (Tanım)

$(4+1)x\leqslant 4x+1$ (Sadeleşme)

$4x+x\leqslant 4x+1$ (Dağılma)

$x\leqslant 1$ (Sadeleşme)

veya,

$D=\{0, 1\}$ dir.

4) $3x+1<8$, $(x\in N)$

$3x+1<7+1$ (Tanım)

$3x<7$ (Sadeleşme)

$3x\leqslant 6$ (Doğal sayılarda sıralama)

$3x\leqslant 3.2$ (Tanım)

$x\leqslant 3$ (Sadeleşme)

veya,

$D=\{0, 1, 2\}$ dir.

4–4. Alıştırmalar

1) Aşağıdaki eşitsizliklerin doğal sayılar kümesinde çözümlerini bulunuz.

a) $2x<4$

b) $6x+3<21$

c) $3y+1\leqslant 4$

d) $3y+4<4+8$

e) $5x+17\geqslant 9x+1$

f) $6x+4\geqslant 5x+8$

2) Aşağıdaki eşitsizliklerin doğal sayılar kümesinde çözümlerini bulunuz.

a) $3x+1<x+4$

b) $2x+7<x+3$

c) $5x+4\leqslant 6x+4$

d) $7x+6<3(x+1)+2$

e) $5(x+1)\leqslant 4(x+1)+5$

f) $3(x+1)\geqslant 2(x+3)+1$

Doğal Sayılar Kümesinde Çıkarma

Doğal sayılar kümesinde çıkarma işlemini ilkokul sıralarından beri yapıyorsunuz. a, b, c$\in$N için a+c=b ise c sayısına b ile a nın farkı denildiğini ve c=b—a ile gösterildiğini de biliyorsunuz. Doğal sayılar kümesinin çıkarma işlemine göre kapalı olmadığını da hatırlatmıştık. Aşağıdaki iki soruyu cevaplandırınız.

1) Doğal sayılar kümesinde tanımlanan çıkarma işleminin değişme özeliğinin bulunmadığını bir örnekle gösteriniz. (a—b$\neq$b—a).

2) Doğal sayılar kümesinde çıkarma işleminin birleşme özeliğinin olmadığını bir örnekle gösteriniz.

$$a-(b-c)\neq(a-b)-c \qquad (a, b, c\in N)$$

Çarpmanın, çıkarma üzerine dağılma özeliğinin bulunduğunu gösterelim. Dağılma özeliği,

$$a(b-c)=ab-ac \quad \text{dir.}$$

Bunu ispat etmek için, b—c=k olsun. Tanım gereğince b=c+k dır. Eşitliğin her iki yanını a ile çarpalım.

$ab=a(c+k)$

$ab=ac+ak$ (Çarpmanın toplama üzerine dağılma özeliği)

$ab+(-ac)=ac+ak+(-ac)$ (Bir sayı ile toplama özeliği)

$ak=ab-ac$ (Sadeleşme özeliği)

$a(b-c)=ab-ac$ (b—c=k olduğu için)

bulunur.

4–5. Alıştırmalar

Aşağıdaki eşitlikleri, çıkarmanın özeliklerini kullanarak, ispatlayınız. (Kullanılan tüm harfler doğal sayılar kümesinin elemanlarıdır.)

1. $(x-y)(x+y)=x^2-y^2$
2. $(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$
3. $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$
4. $(x-1)^2=x^2-2x+1$
5. $(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$
6. $5(x+1)+3(x-1)=8x+2$

Doğal Sayılarda Bölme

a.b=c, (a, b, c$\in$N ve b$\neq$0) ise c nin b ye bölümünün a olduğunu biliyorsunuz.

Bölme işleminin nasıl yapıldığını da biliyorsunuz. 148'in 4'e bölümünün nasıl yapıldığını hatırlayınız.

$$5.4=20 \Rightarrow \frac{20}{4}=5 \text{ tir.}$$

148	4		
— 12	37		$4.x=148$
028		$\Rightarrow$	$4.x=4.37$
— 28			$x=37$
00			

4–6. Alıştırmalar

1. Doğal sayılar kümesinin bölme işlemine göre kapalı olmadığını bir örnekle gösteriniz.

2. Bölme işleminin değişme ve birleşme özeliklerinin olmadığını birer örnekle gösteriniz.

3. Bölme işleminin toplama üzerine dağılma özeliğinin bulunup bulunmadığını, yani;

$$a:(b-c)=(a:b)+(a:c)$$

veya,

$(b+c):a=(b:a)+(c:a)$ olup olmadığını araştırınız.)

4. Çarpma işleminin bölme üzerine dağılma özeliğinin bulunmadığını bir örnekle gösteriniz.

Kalanlı Bölme

122 sayısını 5'e bölünüz. Tam bölünüyor mu? Kalan nedir?

$$\begin{array}{r|l} 122 & 5 \\ \cline{2-2} -\ 10 & 24 \\ \hline 22 & \\ -\ 20 & \\ \hline 2 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 5.x=122 \\ 5x=120+2 \\ 122=5.24+2 \end{array}$$

122'ye **bölünen,** 5'e **bölen,** 24'e **bölüm** ve 2'ye de **kalan** denildiğini biliyorsunuz.

$$122=5.24+2$$

dir. Böyle bir bölmeye kalanlı bölme denir.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \cline{2-2} & c \\ K & \end{array}$$

Kalanlı bölmesinde K kalanı için,

$$0 \leqslant K < b, \quad (K \in N)$$

olduğunu söyleyebilir misiniz? O halde yukarıda verilen bölmeyi,

$$a=b.c+K \quad (0 \leqslant K < b \text{ ve } a, b, c, K \in N)$$

biçiminde yazabilirsiniz.

a nın b ile bölümünde kalan K ise a—K doğal sayısı b ile bölünür. (Neden?)

4–7. Alıştırmalar

1) 1425'i 42 ye bölünüz. Bölüm ve kalanı söyleyiniz.

2) Doğal sayılar kümesinin elemanlarını 5 ile böldüğünüz zaman elde edilen kalanların kümesini yazınız.

3) Doğal sayılar kümesinin elemanlarını 7 ile böldüğünüz zaman elde edilen kalanların kümesini yazınız.

4) 125 ve 256 sayılarını 9 ile bölünüz ve kalanlarını bulunuz. 125 ve 256 yı toplayarak 9'a bölünüz ve kalanını bulunuz. Bu sayıların her birinden elde edilen kalanların toplamını da 9'a bölünüz. Sayıların toplamından elde edilen kalan ile ayrı ayrı kalanların 9'a bölümünden elde edilen kalanı karşılaştırınız.

5) Yukarıdaki 4. alıştırmada toplama yerine çarpmayı alarak aynı şeyleri yapınız ve sonucunu karşılaştırınız. (Çarpmanın sağlamasını nasıl yaptığınızı hatırlayınız.)

6) 1000'e kadar olan doğal sayılardan kaç tanesi 3 ile bölünür?

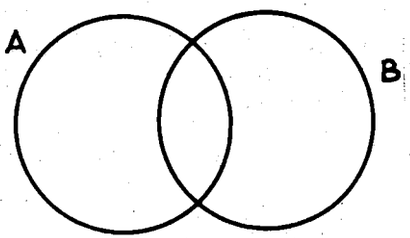
7) 1'den 1000'e kadar olan doğal sayılardan kaç tanesi 3 veya 7 ile bölünebilir?

(Yol gösterme : $s(A \cup B)=s(A)+s(B)-s(A \cap B)$

$A=\{x : x,\ 3 \text{ ile bölünür},\ 1<x<1000\}$

$B=\{x : x,\ 7 \text{ ile bölünür},\ 1<x<1000\}$

olduğuna dikkat ediniz.)



(4–2. Şekil)

8) 1'den 1000'e kadar olan doğal sayılardan kaç tanesi 3 ve 7 ile bölünemez?

4–8. Doğal Sayılar Üzerine Alıştırmalar

1) $x \in N,\ x+5=7 \Rightarrow x=2$ önermesini ispat ediniz.

2) $x \in N,\ 2x+5=11 \Rightarrow x=3$ önermesini ispat ediniz.

3) $x \in N,\ 3x+1=8$ önermesinin çözüm kümesinin $\emptyset$ olduğunu ispat ediniz.

4) Çarpma işlemi yapmaksızın,

$$3x.5=5.7.3 \Rightarrow x=7$$

olduğunu ispat ediniz.

5) $x, y \in N,\ x+y=x \Rightarrow y=0$ olduğunu ispat ediniz.

6) x, y∈N ve x≠0 için,

$$x.y=0 \Rightarrow y=0$$

olduğunu ispat ediniz.

7) x, y∈N için,

$$x.y=0 \Rightarrow x=0 \text{ veya } y=0$$

olduğunu ispat ediniz.

8) x, y∈N, x≠1 için,

$$x.y=y \Rightarrow y=0$$

olduğunu ispat ediniz. (Yol : y=1.y yazınız ve sadeleştirme koşulunu düşününüz.)

9) x, y∈N, x+y=1 ⇒ x=0, y=1 veya x=1, y=0 olduğunu ispat ediniz.

10) x, y∈N, x+y=0 ⇒ x=0 ve y=0 olduğunu ispat ediniz.

11) 5x+8≥23 önermesinin doğruluk kümesini bulunuz. (x∈N).

12) 12—7x<4—3x eşitsizliğinin doğruluk kümesini bulunuz. (x∈N).

13) 2x>0,(x∈N) in doğruluk kümesini bulunuz.

14) 3x+1<0,(x∈N) eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

15) 1'den 900'e kadar 3 ve 5 ile bölünemiyen kaç doğal sayı vardır?

16) (x—3) (x—5)=0,(x∈N) eşitliğinin doğruluk kümesini bulunuz.

17) $x^3+8=0$ eşitliğinin doğal sayılar kümesinde çözümünü bulunuz. (Yol : $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ eşitliği ve 7. alıştırmayı kullanınız.)

18) $x^3+27=0$ eşitliğinin doğal sayılar kümesinde çözümünü bulunuz.

19) $3x^3+192=0$ eşitliğinin doğal sayılar kümesinde çözümünü bulunuz.

20) Çarpmanın etkisiz elemanı nedir? Doğal sayılar kümesinde çarpmaya göre her elemanın tersi var mıdır? Açıklayınız.

4-2. Tamsayılar

Doğal sayılar kümesinin toplama işlemine göre kapalı olduğunu biliyorsunuz. Toplama işleminin etkisiz (birim) elemanı var mıdır? Bu eleman nedir? O halde x∈N için,

$$0+x=x+0=x$$

olduğunu ve buna sıfırın birim (SB) özeliği dediğimizi hatırlayınız. Doğal sayılar kümesinde hangi elemanların toplamaya göre tersi vardır? Sıfırdan başka hiçbir elemanın tersinin olmadığına dikkat ediniz.

$$\forall x\in N \text{ için } 0.x=x.0=0$$

olduğunu da biliyorsunuz.

Doğal sayıların kümesinden daha geniş ve toplamaya göre her elemanın tersini de kapsayan yeni bir sayı kümesini tanımlamaya çalışalım.

Bir duvar termometresinin ölçeğini düşününüz. Bu ölçekte sıfırdan yukarı ve aşağı doğru eşit aralıklarla 1, 2, 3, ... sayıları yazılıdır. Hava sıcaklığı bazen sıfırın üstünde, bazen de sıfırın altında bir dereceyi gösterir. Derece sıfırın üstünde ise, sadece sayıyı söyleriz. Sıfırın altında ise ya "sıfırın altında üç, beş, ..." ya da "eksi üç, eksi beş, ..." deriz. Sıcaklık 8 derece iken 4 derece düşerse, termometre 4'ü, 10 derece düşerse termometre sıfırın altında iki'yi yani eksi ikiyi (—2) gösterecektir deriz.

Birinci halde 8—4=4 . İkincisinde 8—10'u bir doğal sayı olarak hesaplayamayız.

Doğal sayıların toplamaya göre tersi yoktur. Örneğin,

$$5+x=0$$

koşulunu sağlayan bir x∈N yoktur. Doğal sayılar kümesine yeni elemanlar ekliyerek toplamaya göre her elemanın da tersinin bulunduğu yeni bir küme oluşturmaya çalışalım. NXN kümesinin elemanlarının ikililer olduğunu biliyorsunuz. Bu küme üzerinde,

$$\sim=\{((m\,,n)\,,(p\,,q))\mid m+q=n+p,\quad m,\ n,\ p,\ q\in N\}$$

bağıntısını tanımlayalım. Buna göre, örneğin,

$$4+12=7+9 \text{ olduğu için,}$$

$$(4\,,7)\,,(9\,,12)\in\sim \text{ veya } (4\,,7)\sim(9\,,12)$$

dir. Bunun gibi

$$(2\,,5)\sim(4\,,7)\,,(0\,,3)\sim(1\,,4) \text{ yazabiliriz.}$$

NXN de tanımlanmış ∼ bağıntısının,

i) $\forall(m\,,n)$ için $(m\,,n)\sim(m\,,n)$ (Yansıma)

ii) $(m\,,n)\sim(p\,,q) \Rightarrow (p\,,q)\sim(m\,,n)$ (Simetri)

iii) $(m\,,n)\sim(p\,,q)$ ve $(p\,,q)\sim(r\,,s) \Rightarrow (m\,,n)\sim(r\,,s)$ (Geçişme)

koşullarını gerçeklediğini gösteriniz. O halde bu ($\sim$) bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntı NXN yi denklik sınıflarına ayırır.

$(4,10)\sim(6,12)$ olduğu için bunlar aynı denklik sınıfındandır. Öyle ise $(4,10)$, $(6,12)$ ye denktir deriz. Bundan böyle " $\sim$" işareti yerine "$\equiv$" işareti kullanarak bunu $(4,10)\equiv(6,12)$ biçiminde yazacağız. Söz gelimi,

$$(3,3)\equiv(2,2)\equiv(1,1)\equiv(0,0)$$
$$(5,3)\equiv(4,2)\equiv(3,1)\equiv(2,0)$$
$$(3,6)\equiv(2,5)\equiv(1,4)\equiv(0,3)$$

olduğuna dikkat ediniz. Burada ikililerin terimlerini birer azaltarak terimlerden birini sıfıra indirgeyebileceğimizi görüyorsunuz. O halde her doğal sayı ikilisi, $(0,0)$, $(m,0)$ ve $(0,n)$ biçimlerinde temsil edilebilen bir denklik sınıfına ait olur. Burada m ve n sıfırdan farklı doğal sayıları göstermektedir. $(5,9)$, $(7,2)$, $(5,5)$ ikililerinin ait olduğu denklik sınıflarını bulunuz.

4–4. Tanım

m, n sıfırdan farklı doğal sayılar olmak üzere $(0,0)$, $(m,0)$, $(0,n)$ biçiminde temsil edilebilir bütün denklik sınıflarına **tamsayılar** denir. Tamsayılar kümesi Z ile gösterilir.

$(7,4)$ ikilisi $(3,0)$ denklik sınıfı, $(5,5)$ ikilisi $(0,0)$ denklik sınıfı ve $(7,11)$ ikilisi ise $(0,4)$ denklik sınıfı ile temsil edilebilen birer tamsayıdır.

Tamsayılar arasında toplama işlemini de şöyle tanımlayalım.

4–5. Tanım

Her m, n, p, $q\in N$ için,

$$(m,n)+(p,q)=(m+p,n+q)$$

dur. Bu tanıma göre örneğin,

$$(3,0)+(0,1)=(3+0,0+1)=(3,1)=(2,0)$$

$$(5,2)+(2,1)=(5+2,2+1)=(7,3)=(4,0) \text{ dır.}$$

Şimdi tamsayılar kümesinde tanımlanan bu toplama işleminin özeliklerini araştıralım.

i) $(m,n)+(p,q)=(m+p,n+q)\in Z$ (Neden?)

O halde tamsayılar kümesi + ya göre **kapalıdır.**

ii) $(m,n)+((p,q)+(r,s))=((m,n)+(p,q))+(r,s)$

Önce parantez içindeki toplamaları yaparak,

$$(m,n)+(p+r,q+s)=(m+p,n+q)+(r,s)$$

elde edilir. Buradan da,

$$(m+p+r,n+q+s)=(m+p+r,n+q+s)$$

olur. O halde + işleminin **birleşme özeliği vardır.**

iii) **Birim elemanı (0, 0) dır.** Çünkü, $\forall(m,n)\in Z$ için,

$$(0,0)+(m,n)=(m,n)+(0,0)=(m,n) \text{ dir.}$$

iv) $(m,n)\in Z$ nin toplamaya göre tersi (n,m) dir.

Çünkü,

$$(m,n)+(n,m)=(n,m)+(m,n)=(m+n,n+m)=(0,0) \text{ dır.}$$

O halde,

$(5,3)\equiv(2,0)$ ın tersi $(0,2)$,

$(1,4)\equiv(0,3)$ ün tersi $(3,0)$,

$(3,3)\equiv(0,0)$ ın tersi yine $(0,0)$ dır.

Bunlardan $m\neq 0$ olmak üzere herhangi bir $(m,0)$ ın tersinin $(0,m)$ ve $(0,m)$ in tersinin de $(m,0)$ olacağını görünüz. $(0,0)$ ın tersi de kendisidir.

v) Z kümesinde toplama işleminin değişme özeliğinin de bulunduğunu siz gösteriniz.

4–6. Tanım

m, n, p, $q\in N$ için,

$$(m,n).(p,q)=(mp+nq,mq+np) \text{ dir.}$$

Bu tanımdan yararlanarak

$$(2,5).(3,1)=((6+5,2+15)=(11,17)=(0,6),$$
$$(0,2).(0,4)=(0+8,0+0)=(8,0)$$
$$(0,0).(5,3)=(0+0,0+0)=(0,0)$$
$$(1,0).(0,7)=(0+0,7+0)=(0,7)$$
$$(0,4).(1,0)=(0+0,0+4)=(0,4)$$

bulunur.

Z de toplam ve çarpım tanımlarına göre genel olarak,

$(m , 0)+(n , 0)=(m+n , 0)$

$(0 , 0)+(m , 0)=(m , 0)$

$(m , 0) . (n , 0)=(m . n , 0)$

$(1 , 0) . (m , 0)=(m , 0)$

$(0 , 0) . (m , 0)=(0 , 0)$

olduğu kolayca görülür. Burada m ile n sıfırdan farklı doğal sayılardır. Bu ifadeleri, bir de parantezleri, virgülleri ve virgülden sonraki sıfırları kaldırarak yazarsak,

$$m+n=m+n$$

$$0+m=m$$

$$m . n=mn$$

$$1 . m=m$$

$$0 . m=0$$

olduğunu görürüz.

Demek ki $(0 , 0)$ ve $(m , 0)$ biçimindeki tam sayıları birer doğal sayı gibi düşünmekte bir sakınca yoktur.

Öyle ise $(0 , 0)$ ikilisini kısaca 0 ve $(m , 0)$ ikilisinide m ile gösterebiliriz.

4–7. Tanım

$m \in N$, $m \neq 0$ için $(m , 0)$ biçimindeki sayılara pozitif tam sayılar denir ve $(m , 0)$ veya m ile gösterilir.

$(0 , 0)$ tam sayısı da 0 biçiminde yazılır.

Bu tanıma göre $(5 , 0)=5$, $(7 , 0)=7$ dir.

$(3 , 3)=0$, $(5 , 5)=0$, $(m , m)=0$ dır.

$m \neq 0$ için bir $(m , 0)$ doğal sayı ikilisinin $+$ ya göre tersinin $(0 , m)$ olduğunu biliyorsunuz.

Çünkü,

$$(m , 0)+(0 , m)=(0 , m)+(m , 0)=(0 , 0)$$

dır. Bu eşitliği bir de 4–7 tanımını kullanarak yazalım.

$$m+(0 , m)=(0 , m)+m=0$$

olur. Söz gelimi,

$$4+(0 , 4)=0 \text{ dır.}$$

4 ile toplamı 0 eden doğal sayı bulunmadığını biliyorsunuz. Ohalde $(0 , 4)$ tam sayısı, daha genel olarak $m \neq 0$ için $(0 , m)$ biçimindeki tam sayılar, doğal sayı gibi düşünülemezler. Bu biçimdeki sayılar için yeni isimler ve yeni semboller bulacağız.

4–8. Tanım

$m \neq 0$ için $(0 , m)$ biçimindeki sayılara negatif tam sayılar denir ve $(0 , m)$ veya ^{-}m ya da $-m$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre

$$(0 , 4)=-4 \ , \ (0 , 1)=-1 \ , \ (0 , 2)=-2 \text{ dir.}$$

Tamsayılar kümesini Z ile göstermiştik. Bu küme,

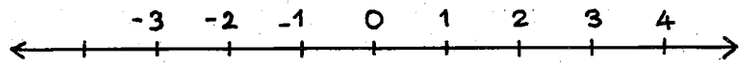
$$Z=\{\ldots , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

dır. O halde bir tamsayı, ya negatif ya sıfır ya da pozitiftir ve ancak bunlardan birisi olabilir. Pozitif tamsayılar kümesi N^+ ve negatif tam sayılar kümesi N^- ile gösterilir. Buna göre,

$$Z=N^- \cup \{0\} \cup N^+$$

biçiminde de yazılır.

Bir sayı ekseninde bir noktayı 0 ile gösterdikten sonra sıfırdan sağa doğru birer birim ara ile 1, 2, 3, ... doğal sayıları işaretlediğimizi ve sıfırın diğer yanının boş bulunduğunu hatırlayınız. Şimdi de sıfırdan sola doğru da negatif tam sayıları birer birim ara ile işaretleyelim. (4–3. Şekil)



(4–3. Şekil)

Böylece her tam sayıya sayı ekseninin bir ve yalnız bir noktası karşı gelmiş olur. Acaba sayı ekseninin her noktasına da bir tamsayı gelmiş olur mu? Cevabımız hayır olacaktır.

İleride tamsayılar kümemizi de genişleterek sayı ekseninin açıkta kalan noktalarına karşı gelecek sayıları da elde edeceğiz.

Şimdi tamsayılar için tanımladığımız işlemlere alışabilmek için bazı örnekler veriyoruz.

$$(-7)+(\ 5\ )=(0\ ,\ 7)+(5\ ,\ 0)=(0\ ,\ \ 2)=-2$$
$$(-4)+(-8)=(0\ ,\ 4)+(0\ ,\ 8)=(0\ ,\ 12)=-12$$
$$(-1)\ .\ (-3)=(0\ ,\ 1)\ .\ (0\ ,\ 3)=(3\ ,\ \ 0)=3$$
$$(-2)\ .\ (\ 4\ )=(0\ ,\ 2)\ .\ (4\ ,\ 0)=(0\ ,\ \ 8)=-8$$
$$(\ 1\ )\ .\ (-3)=(1\ ,\ 0)\ .\ (0\ ,\ 3)=(0\ ,\ \ 3)=-3$$
$$(3)\ .\ (2)=(3\ ,\ 0)\ .\ (2\ ,\ 0)=(6\ ,\ 0)=6$$

Daha genel olarak şu örnekleri inceliyelim.

$m\ ,\ n\in N$ ve $m\neq 0$, $n\neq 0$ için,

$$m\ .\ n=(m\ ,\ 0)\ .\ (n\ ,\ 0)=(mn\ ,\ 0)=m\ .\ n$$
$$(-m)\ .\ (-n)=(0\ ,\ m)\ .\ (0\ ,\ n)=(mn\ ,\ 0)=m.n$$
$$(-m)\ .\ (n)=(0\ ,\ m)\ .\ (n\ ,\ 0)=(0\ ,\ mn)=-mn$$
$$(m)\ .\ (-n)=(m\ ,\ n)\ .\ (0\ ,\ n)=(0\ ,\ mn)=-mn$$

Görüyoruz ki iki pozitif veya iki negatif tam sayının çarpımı pozitif, bir negatif sayı ile bir pozitif sayının çarpımı da negatiftir.

Z kümesinde çarpma işleminin bazı özeliklerini araştıralım.

4–1. Teorem

i) Z kümesinde çarpma işleminin birim elemanı 1 dir.

ii) Çarpma işleminin değişme özeliği vardır.

İspat :

i) $x\in Z$ ise $x=0$ veya $x\in N^-$ ya da $x\in N^+$ dır. Her üç halde de $1.x=x.1=x$ olduğu gösterilebilir. Daha kısa olarak $x\in Z$ yi $x=(m\ ,\ n)$ biçiminde yazıp,

$$1.x=(1\ ,\ 0).(m\ ,\ n)=(m\ ,\ n)=x$$

elde ederiz.

ii) $x\ ,\ y\in Z$ ve $x=(m\ ,\ n)$, $y=(p\ ,\ q)$ alarak

$$x.y=y.x$$

olduğunu siz ispatlayınız.

Z kümesinde çarpma ve toplamanın kısaltma özeliklerini gösteren teoremleri verelim.

4–2. Teorem

i) $\forall x, y, z\in Z$ için
$x+y=x+z \Rightarrow y=z$

ii) $x, y, z\in Z$ ve $z\neq 0$,
$x.z=y.z \Rightarrow x=y$ dir.

İspat :

i) $\forall x\in Z$ nin toplamaya göre tersinin bulunduğunu biliyoruz. Yani $x\in Z$ için $x+(-x)=-x+x=0$ dır. Hipotezden,

$$x+y=x+z$$

dir. Eşitliğin iki yanına x'in tersi olan $-x$' i toplayalım. Böylece,

$$-x+(x+y)=-x+(x+z)$$
$$(-x+x)+y=(-x+x)+z \qquad \text{(Birleşme özeliği)}$$
$$0+y=0+z$$
$$y=z$$

elde edilir.

ii) $\forall x, y, z, \in Z$ yi $x=(m\ ,\ n)$, $y=(p\ ,\ q)$, $z=(s\ ,\ t)$ biçiminde alalım. $z\neq 0$ olduğundan $s\neq t$ dir. Hipotezden,

$$x.z=y.z$$
$$(m\ ,\ n)(s\ ,\ t)=(p\ ,\ q)(s\ ,\ t)$$

dir. Çarpma yapılarak,

$$(ms+nt\ ,\ mt+ns)=(ps+qt\ ,\ pt+qs)$$

elde edilir. Burada $=$ işareti $\sim$ anlamında olduğundan,

$$ms+nt+pt+qs=mt+ns+ps+qt$$

yazılır. $s\neq t$ olduğu için ya $s<t$ ya da $s>t$ dir. $s>t$ olduğunu varsayalım. N deki özeliklerden,

$$(m+q)s+(n+p)t=(n+p)s+(m+q)t$$

bulunur. N deki çıkarma işleminden ve çarpmanın çıkarma üzerine dağılma özeliğinden sırayla,

$$(m+q)s-(m+q)t=(n+p)s-(n+p)t$$

ve,

$$(m+q)(s-t)=(n+q)(s-t)$$

ve buradan da çarpmanın sadeleşme özeliğinden,

$$m+q=n+p$$

yahut,

$$(m\,,\,n)=(p\,,\,q)$$

$$x=y$$

elde edilir.

Tamsayılar üzerinde toplama ve çarpmanın değişme özelikleri bilindiğinden bu teoremle ispatlanan sadeleştirme özeliklerini sağdan veya soldan kullanmakta sakınca yoktur.

Örneğin, $x, y\in Z$ için,

$x+3=x+y \Rightarrow 3=y,$

$x+y=-2+y \Rightarrow x=-2,$

$x\neq 0$ ve $5.x=y.x \Rightarrow 5=y,$

$-3x=-3.5 \Rightarrow x=5$

dir.

4–8. Tanım

$\forall x, y\in Z$ için,

$x-y=x+(-y)$

x ile y nin farkı ve fark alma işlemine de **çıkarma** denir.

Bu tanımdan, x ten y' yi çıkarmak demek, x'e —y yi yani y nin + işlemine göre tersini toplamak demektir. Buradan tamsayıların çıkarmaya göre kapalı olduğunu da anlıyoruz. Örneğin,

$5-3=5+(-3)=2\,,$

$3-5=3+(-5)=-2\,,$

$(-3)-5=-3+(-5)=-8\,,$

$(-5)-(-3)=-5+(-(-3))=-5+3=-2$

dir.

Z'de tanımlanan çıkarma işlemi N'deki çıkarma işleminin bir genişlemesidir. Çünkü, $x, y\in N$ ve $x\geqslant y$ için,

$$z=(x-y)\in N$$

dir. Buradan,

$$x=y+z$$

yazar ve bunun her iki yanına —y eklersek,

$$x+(-y)=y+(-y)=z$$

bulunur. Demek ki,

$$z=x+(-y)$$

dir.

Şimdi tamsayılarla ilgili bazı teoremleri ispatlarını yapmadan verelim.

4–3. Teorem

i) $\forall x\in Z$ için,
$-1.x=-x$

ii) $\forall x, y\in Z$ için,
$x.(-y)=-(x.y)$

iii) $\forall x, y, z\in Z$ için,
$x(y-z)=xy-xz$

iv) $\forall x, y\in Z$ için,
$-(x-y)=-x+y$

dir.

4–4. Örnek

1) $-1.3=-3\,,\ -1.(-3)=-(-3)=3$

2) $2.(-3)=-(2.3)=-6$
$(-2)(-3)=-((-2)(3))=-(-6)=6$

3) $-3(5-2)=(-3)(5)-(-3)(2)=-15+6=-9$
$2(-5-(-7))=2.(-5)-2(-7)=-10+14=4$

4) $-(8-5)=-8+5=-3$
$-(-2-(-7))=-(-2)+(-7)=2-7=-5$

Tamsayılarda Sıralama

Doğal sayılarda olduğu gibi tamsayılarda da sıralama vardır. Bunun tanımını şöyle veriyoruz :

4–9. Tanım

$\forall x, y \in Z$ için,

$$x+z=y$$

koşulunu sağlayan bir $z \in N^+$ varsa "x y den küçüktür" denir ve bu $x<y$ biçiminde yazılır.

Doğal sayılarda olduğu gibi $x<y$ ile $y>x$ aynı anlamdadır. Bu tanımın,

$$y-x>0 \iff x<y$$

tanımı ile denk olduğuna dikkat ediniz.

$3+2=5 \Rightarrow 3<5$ $\qquad (5-3<0)$

$-3+2=-1 \Rightarrow -3<-1$ $\qquad (-1+(+3)<0)$

$-4+4=0 \Rightarrow -4<0$

$0+1=1 \Rightarrow 0<1$

$-5+8=3 \Rightarrow -5<3$

tür. Şimdi tamsayılardaki sıralamanın özeliklerini belirten teoremi veriyoruz.

4–4. Teorem

i) $x, y, z \in Z$ için,

$x<y \iff x+z<y+z$

ii) $x, y, z, v \in Z$ için,

$x<y\,,\ z<v \Rightarrow x+z<y+v$

iii) $x, y, z \in Z$ ve $z>0$ için,

$x<y \iff x.z<y.z$

iv) $x, y, z \in Z$ ve $z<0$ için,

$x<y \iff x.z>y.z$

dir.

Teoremin ispatını yapmayıp bu özeliklerle ilgili örnekler veriyoruz.

4–5. Örnek

1) $-5<-3 \iff -5+4<-3+4 \iff -1<+1$

2) $-2<-1$ ve $4<5 \Rightarrow -2+4<-1+5 \Rightarrow 2<4$

3) $-8<-3 \iff 3.(-8)<3(-3) \iff -24<-9$

4) $4<5 \iff -2.4>-2.5 \iff -8>-10$

Tam sayılar kümesinde bölme işleminin tanımını da aşağıdaki biçimde veriyoruz.

4–10. Tanım

$x, y \in Z$ ve $y \neq 0$ olmak üzere $y.z=x$ koşulunu sağlayan bir $z \in Z$ varsa buna x'in y ye bölümü denir. Ve $z=\frac{x}{y}$ biçiminde yazılıp "x'in y'ye bölümü z'ye eşittir" diye okunur.

Bu tanım gereğince,

$7.5=35 \Rightarrow 7=\frac{35}{5}$ veya $5=\frac{35}{7}$,

$(-3)4=-12 \Rightarrow -3=\frac{-12}{4}$ veya $4=\frac{-12}{-3}$

$0.8=0 \Rightarrow 0=\frac{0}{8}$ $\qquad (y \neq 0$ şartını hatırlayınız.)

$0.(-2)=0 \Rightarrow 0=\frac{0}{-2}$

$(-2)(-5)=10 \Rightarrow -2=\frac{10}{-5}$ veya $-5=\frac{10}{-2}$

bulunur. $x.5=28$ koşulunu sağlayan $x \in Z$ var mıdır? O halde tam sayılar kümesi bölme işlemine göre kapalı mıdır?

Aynı işaretli tam sayıların çarpımlarının pozitif, zıt işaretli tam sayıların çarpımının da negatif ettiğini biliyorsunuz. Bölme tanımını kullanarak bu durumun bölme için de aynı olduğunu yani,

i) Aynı işaretli iki tam sayının bölümü (varsa) pozitif,

ii) Zıt işaretli iki tam sayının bölümü (varsa) negatif olduğunu gösterebilirsiniz.

Tam sayıların tümü pozitif olmadığı için bunların toplamaya göre terslerinin tümü de negatif olamaz. Örneğin, 5'in toplamaya göre tersi —5, —7'nin toplamaya göre tersi de 7 dir. Genel olarak a tam sayısı 0 olmadıkça a ve –a dan biri pozitif iken diğeri negatif olur. Bir a tam sayısının pozitif mi, negatif mi olduğunu bilmeden pozitif olarak almak sakıncalı olur. Bu nedenle bir sayının "**mutlak değerini**" şu biçimde tanımlarız.

4–11. Tanım

Bir a tam sayısının **mutlak değeri** $|a|$ biçiminde gösterilir ve

$$a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$$

ve,

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

dır.

Bu tanıma göre örneğin,

$$|0| = 0\,,\ |5| = 5 \text{ ve } |-5| = -(-5) = 5.$$

dir. Genel olarak, $a \neq 0$ ise $|a| > 0$ olacağına dikkat ediniz. O halde $a \neq 0$ olmak üzere her $a \in Z$ için $|a|$ pozitif ve $-|a|$ nefgatiftir.

Şimdi mutlak (salt) değerle ilgili iki teorem ispatlayalım.

4–5. Teorem

$\forall a \in Z$ için $-|a| \leq a \leq |a|$ dır.

İspat :

i) $a \geq 0 \Rightarrow a = |a|$ ve $-|a| \leq 0$ olduğu için,
(a=0 için eşitlik olur.)
$-|a| \leq 0 \leq a = |a|$

dır.

ii) $a < 0 \Rightarrow a = -|a|$ ve $a \neq 0$ olduğu için,
$0 < |a|$ dır. Bu durumda da,
$-|a| = a < 0 < |a|$

olur. O halde her $a \in Z$ için,
$-|a| \leq a \leq |a|$

dır.

4–6. Teorem

$a, b \in Z$ için $|ab| = |a| . |b|$ dir.

İspat :

Beş hali gözönüne almak gerekir.

i) $0 \leq a\,,\ 0 < b$
ii) $0 \leq a\,,\ b < 0$
iii) $a < 0\,,\ 0 \leq b$
iv) $a < 0\,,\ b < 0$
v) $a = 0\,,\ b = 0$

"i" için, $a = |a|$ ve $b = |b|$ dir. $0 \leq ab$ olacağından, $ab = |ab|$ olur. O halde $|ab| = ab = |a| . |b|$ dir.

"ii" için $a = |a|\,,\ -b = |b|$ dir, ve $ab \leq 0$ olacağından, $|ab| = -(ab)$ olur. O halde $|ab| = -(ab) = a(-b) = |a| . |b|$ dir.

Diğer haller benzer biçimde ispatlanır.

4–6. Örnek

$|x+1| \leq 2$ eşitsizliğini sağlayan bütün tamsayıları bulunuz.

Çözüm : Burada iki hal olabilir.

i) $0 \leq x+1$
ii) $x+1 < 0$

"i" hali: $0 \leq x+1 \Rightarrow |x+1| = x+1$ yazabiliriz.

$$0 \leq x+1 \text{ ve } |x+1| \leq 2 \iff 0 \leq x+1 \leq 2 \iff -1 \leq x \leq 1$$

"ii" hali: $x+1 < 0$ ise $|x+1| = -(x+1)$

O halde,

$$x+1 < 0 \text{ ve } |x+1| \leq 2 \iff 0 < -(x+1) \leq 2 \iff -3 \leq x < -1$$

İki hali birleştirirsek,

$$|x+1| \leq 2 \iff -3 \leq x \leq 1 \text{ elde edilir.}$$

O halde çözüm kümesi $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$ dir.

4–9. Alıştırmalar

1) Aşağıdaki eşitlikleri çözünüz.

a) $5x-2<13$ $(x\in N)$

b) $5x-2<13$ $(x\in Z)$

c) $4y-7<2y+3$ $(y\in N)$

d) $4y-7<2y+3$ $(y\in Z)$

e) $4x-1\leqslant 2(x+1)$ $(x\in Z)$

f) $5<7x-2<12$ $(x\in Z)$

g) $y-1\leqslant 2y-3\leqslant y+1$ $(y\in Z)$

2) Aşağıdaki denklem ve eşitsizlikleri çözünüz. (Harfler tamsayıları ifade etmektedir.

a) $|x|=3$

b) $|y|<4$

c) $|x+4|<-1$

d) $|2x+1|=3$

e) $|4x-1|-7=0$

f) $|x+3|\leqslant 7$

g) $5+|x+6|<8$

Tamsayılarda Özelikler

"Negatif olmayan tamsayılar" dediğimiz zaman doğal sayıları anlatmak isteriz. $a, b\in N$ ve $a<b$ iken öyle bir $n\in N^+$ bulunabilir ki, $n.a>b$ olur. Bu özelik tamsayılar için de vardır. (Arşimet özeliği).

Doğal sayıların en küçük bir elemanı bulunduğu halde tamsayılar kümesinde bu özelik yoktur. Örneğin, negatif tamsayılar bir "en küçük eleman" a sahip değildir.

Tamsayılar birbirlerine yeteri kadar yakın değildirler. Yani a ve b farklı iki tam sayı ise $a-b$ değeri 1'den daha küçük olamaz. Bu nedenle N ve Z kümelerine **seyrek kümeler** denir.

Halbuki gelecek bölümde göreceğimiz rasyonal ve reel sayı kümelerinin bu özeliği yoktur. Herhangi iki rasyonel veya reel sayı arasında daima yeni bir rasyonel veya reel sayı bulunacağından bu kümelere yoğun kümeler diyeceğiz.

Tamsayılar kümesinin temel özeliklerini bir liste halinde verelim. Eşitliğe ilişkin özelikler :

1) $a=b$ veya $a\neq b$ (İki hal özeliği)

2) $a=b$ ise $b=a$ (Eşitliğin simetri özeliği)

3) $a=b\Leftrightarrow a+c=b+c$ (Toplamanın sadeleşme özeliği) (TS)

4) $a=b\Leftrightarrow a.c=b.c (c\neq 0)$ (Çarpanın sadeleşme özeliği) (ÇS)

5) $a+b=b+a$ (Toplamanın değişme özeliği) (TD)

6) $a+(b+c)=(a+b)+c$ (Toplamanın birleşme özeliği) (TB)

7) $a+0=0+a=a$ (Sıfırın birim özeliği) (SB)

8) $a . b=b.a$ (Çarpmanın değişme özeliği) (ÇD)

9) $a . (b.c)=(a.b).c$ (Çarpmanın birleşme özeliği) (ÇB)

10) $1 . a=a.1=a$ (Bir'in birim eleman özeliği) (BB)

11) $a . (b+c)=ab+ac$ (Çarpmanın toplama üzerine dağılma öz.) (D)

Eşitsizliklere ilişkin özelikler :

1) a , b tam sayıları için aşağıdakilerden bir ve yalnız biri doğrudur. (Üç hal özeliği)

$$a=b\ ,\ a>b\ ,\ a<b$$

2) $a<b\ ,\ b<c \Rightarrow a<c$ (Geçişme özeliği) (G)

3) $a<b \Leftrightarrow a+c<b+c$ (Bir sayı toplama veya sadeleştirme özeliği) (S)

4) $a<b\ ,\ c>0 \Leftrightarrow ac<bc$ (Çarpma veya çarpmanın sadeleştirme özeliği) (ÇS)
$a<b\ ,\ c<0 \Leftrightarrow ac>bc$

5) $a, b\in N^+$ ve $a<b$ ve $n.a>b$ koşulunu sağlayan bir n pozitif tam sayısı vardır. (Arşimet özeliği)

6) $a, b\in Z$ ve $a\neq b$ ise $1\leqslant |a-b|$ dir. (Seyreklik özeliği)

4–10. Alıştırmalar

1) Aşağıda $\sim$ bağlantısı ile bağlanan ikililerde noktalı yerlere uygun doğal sayıları yazınız.

a) $(3\ ,\ 5)\sim(.\ ,\ 8)$

b) $(7\ ,\ .)\sim(11\ ,\ 15)$

c) $(0\ ,\ 2)\sim(4\ ,\ .)$

d) $(5\ ,\ 0)\sim(8\ ,\ .)$

2) Aşağıda $\sim$ bağıntısı ile bağlı ikililerde x'i bulunuz.

a) $(x , 3)\sim(6 , 2x)$

b) $(4 , 2x)\sim(5x , 3)$

c) $(3 , x)\sim(3x , 13)$

d) $(0 , 5)\sim(x , 6)$

3) Aşağıdaki toplama ve çarpmaları yapınız.

a) $(8 , 3)+(5 , 6)$

b) $(4 , 8)+(3 , 5)$

c) $(7 , 3) . (3 , 7)$

d) $(0 , 1) . (3 , 4)$

4) Aşağıda $\sim$ bağıntısı ile bağlı işlemlerdeki x'i bulunuz.

a) $(4 , 9)+(5 , 3)\sim(8 , 6)+(12 , x)$

b) $(8 , 6) . (3 , 5)\sim(7 , 5) . (x , 4)$

5) $(a , b)\sim(c , d)$ ve $(p , q)\sim(s , t)$ olduğuna göre,

i) $(a , b)+(p , q)=(c , d)+(s , t)$

iii) $(a , b) . (p , q)\sim(c , d) . (s , t)$

olduğunu gösteriniz.

6) Çarpmanın tanımını kullanarak,

$$(-3)^2=9 \ , \ 0^2=0 \ , \ (-2)(-3)=6$$

olduğunu bulunuz.

7) $\forall x , y\in Z$ için,

$$x.y=0 \iff x=0 \text{ veya } y=0$$

olduğunu ispatlayınız.

8) Z de verilen aşağıdaki açık önermenin doğruluk kümesini bulunuz. (7. alıştırmadan yararlanınız.)

$$(x+3) . (x-1)=0$$

9) Z de verilen aşağıdaki açık önermenin doğruluk kümesini bulunuz.

$$-2(x+1) . (2x-6) . (4x-1)=0$$

10) $x\in Z$ için,

$$x=-x \iff x=0$$

olduğunu kanıtlayınız.

11) $\forall x , y\in Z$ için,

$$-(2x+3y-5)=-2x-3y+5$$

olduğunu gösteriniz.

12) $\forall x\in Z$ için,

$$(-x)^2=x^2$$

olduğunu ispatlayınız.

13) Z de çıkarma işleminin değişme özeliği olmadığını gösteriniz.

14) $\forall x\in Z$ için,

a) $x^2\geqslant 0$

b) $x^2\geqslant x$

olduğunu ispatlayınız.

15) Z de,

$$x^2+3=x$$

açık önermesinin doğruluk kümesinin boş küme olduğunu gösteriniz.

16) $a , b\in Z$ için,

a) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

b) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

olduğunu gösteriniz.

17) Z de verilen aşağıdaki açık önermelerin doğruluk kümesini bulunuz. (16. alıştırmadan yararlanınız.)

a) $x^3+1=0$

b) $x^3-27=0$

c) $x^3=8$

d) $2x^3=-16$

18) $f : Z\rightarrow$, $f(x)=-x$ fonksiyonunun bire-bir örten olduğunu gösteriniz.

19) Z'de verilen aşağıdaki açık önermelerin doğruluk kümelerini bulunuz.

a) $2x-5<3$ d) $5x-1>7$

b) $3x+2>14$ e) $1\leqslant x-2<8$

c) $3x+2>12$ f) $2<x+3\leqslant 7$

20) Aşağıda verilen eşitsizliklerin doğruluk kümelerini bulunuz.

a) $|x-2|\leqslant 7$ d) $|x-1|\geqslant 2$

b) $|x+1|\leqslant 4$ e) $2\leqslant|x+1|\leqslant 5$

c) $|x+7|>3$ f) $3\leqslant|x-1|\leqslant 4$

21 $\forall a\in Z$ için,

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$$

olduğunu gösteriniz.

Tamsayılar Kümesinde Kalanlı Bölme

Doğal sayılar kümesinde kalanlı bölmeyi incelemiştik.

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline & p \\ K & \end{array}$$

biçimindeki kalanlı bölmesini,

$$a=b.p+K\ ,\ (0\leqslant K<b)$$

biçiminde yazılabileceğini de biliyorsunuz.

a sayısı b ile bölündüğü zaman K kalanını veriyorsa a–K nin b ile kalansız bölüneceğini de biliyorsunuz. Örneğin, 17'yi 3'e böldüğünüz zaman kalanı 2'dir. O halde 17—2=15 artık 3 ile kalansız bölünecektir.

3. bölümde tamsayılar kümesinde $\beta=\{(x\ ,\ y)|x-y$ üç ile bölünür, x , y tam sayılar.$\}$ olarak verilen bir bağıntıyı incelemiş ve bir denklik bağıntısı olduğunu görmüştünüz. Bu denklik bağıntısının denklik sınıflarının kümesi ile tamsayıların 3 ile bölümünden oluşan kalanların kümesini karşılaştırınız. Her iki kümenin de $\{0, 1, 2\}$ olduğunu gördünüz mü?

4–3. Modüler Aritmetik

Tamsayılar üzerinde tanımlanmış $\beta=\{(x\ ,\ y)|x-y\ ,\ 5$ ile bölünür, $x\ ,\ y\in Z\}$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz. Bu denklik bağıntısına göre denklik sınıflarını aşağıdaki biçimde gösterelim.

$$\overline{0} = \{\ldots\ ,\ -15,\ -10,\ -5,\ 0,\ 5,\ 10,\ 15,\ \ldots\}$$
$$\overline{1} = \{\ldots\ ,\ -14,\ -9,\ -4,\ 1,\ 6,\ 11,\ 16,\ \ldots\}$$
$$\overline{2} = \{\ldots\ ,\ -13,\ -8,\ -3,\ 2,\ 7,\ 12,\ 17,\ \ldots\}$$
$$\overline{3} = \{\ldots\ ,\ -12,\ -7,\ -2,\ 3,\ 8,\ 13,\ 18,\ \ldots\}$$
$$\overline{4} = \{\ldots\ ,\ -11,\ -6,\ -1,\ 4,\ 9,\ 14,\ 19,\ \ldots\}$$

Bu sınıfların her birinde bulunan elemanların 5 ile bölümünden elde edilen kalanların kendi sınıfını verdiğini görünüz. Söz gelimi 18 , 5 ile bölününce kalanı 3 tür. O halde $\overline{3}$ denklik sınıfını vermektedir. Biz, aynı sınıfta olan iki elemanın denk olacağını biliyoruz. Örneğin, $13\equiv 18$ dir. 5'in kalan sınıfına göre denk olduğunu göstermek için de,

$$13\equiv 18\pmod 5$$

biçiminde yazar ve "5 modülüne göre 13 , 18'e denktir" diye okuruz. Şimdi konuyu genelleştirelim. Z tamsayılar kümesi ve m de herhangi bir pozitif tamsayı olsun.

$$\beta=\{(x\ ,\ y)\mid x-y\ ,\ m \text{ ile bölünür},\ x\ ,\ y\in Z\}$$

bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösterebiliriz. Burada denklik sınıflarının kümesi,

$$\{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3},\ \ldots\ ,\ \overline{(m-1)}\}$$

dir. Bu kümeyi Z/m olarak göstereceğiz. Sözgelimi,

$$Z/5 = \{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3},\ \overline{4},\}$$
$$Z/4 = \{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3}\ \}$$

dir.

Z/m kümesine m'nin kalan sınıflarının kümesi de denir. $(u\ ,\ v)\in\beta$ ise yani u ile v aynı sınıfın elemanı ise,

$$u\equiv v\pmod m$$

biçiminde gösterilir. Sözgelimi,

$3 \equiv 18 \pmod 5$, $7 \equiv 0 \pmod 7$, $3 \equiv 24 \pmod 7$

Burada 18'i 5'e bölünce kalanın 3, 7'yi 7'ye bölünce kalanın 0 ve 24'ü 7 ile bölünce kalanın 3 olduğuna dikkat ediniz.

Z/m kümesine ait iki önemli özeliği gösteren şu teoremleri ispatlayalım.

4–7. Teorem

x,y,z∈Z için,

$$x \equiv y \pmod m \quad \text{ve} \quad z \equiv v \pmod m \quad \text{ise,}$$

$$x.z \equiv y.v \pmod m$$

dir.

İspat :

$$x \equiv y \pmod m \Rightarrow \frac{x-y}{m} = p \,,\ p \in Z \Rightarrow x-y = mp$$

$$z \equiv v \pmod m = \frac{z-v}{m} = k \,,\ k \in Z \Rightarrow z-v = mk$$

dır. Bu eşitliklerin aynı yanlarını toplayabiliriz.

$$(x-y)+(z-v) = mp+mk$$
$$(x+z)-(y+v) = m(p+k)$$

bulunur. Buradan,

$$\frac{(x+z)-(y+v)}{m} = (p+k) \in Z \Rightarrow x+z \equiv y+v \pmod m$$

dir.

Sözgelimi,

$$27 \equiv 52 \pmod 5 \quad \text{ve} \quad 81 \equiv 6 \pmod 5 \quad \text{ise}$$

toplamları, $108 \equiv 58 \pmod 5$ yazabiliriz.

4–8. Teorem

x,y,z∈Z için,

$$x \equiv y \pmod m \quad \text{ve} \quad z \equiv v \pmod m \quad \text{ise,}$$

$$x.z \equiv y.v \pmod m$$

dir.

İspat :

$$x \equiv \pmod m \Rightarrow \frac{x-y}{m} = k \,,\ k \in Z \Rightarrow x-y = mk \Rightarrow x = y+mk$$

$$z \equiv v \pmod m \Rightarrow \frac{z-v}{m} = p \,,\ p \in Z \Rightarrow z-v = mp \Rightarrow z = v+mp$$

Bu eşitlikleri taraf tarafa çarpalım.

$x.z = (y+mk)(v+mp)$

$x.z = y.v+mpy+m^2pk$

$x.z = y.v+m(py+kv+mpk)$

$x.z = y.v+m(py+kv+mpk)$

$(py+kv+mpk = q \in Z)$ dir. Buradan,

$z.z-y.v = mq$ yani $xz-yv$, m ile bölünür.

Böylece,

$$x.z \equiv y.v \pmod m$$

elde edilir.

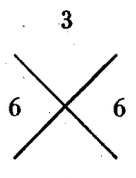
Bu teorem gereğince,

$$25 \equiv 16 \pmod 9 \ , \ 15 \equiv 24 \pmod 9 \text{ ise,}$$

$$25.15 = 16.24 \pmod 9 \text{ dur.}$$

Daha önceki sınıflarda yaptığınız çarpmanın sağlama işlemi bu teoreme dayanır.

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times\ 14 \\ \hline 192 \\ +\ 48 \\ \hline 672 \end{array}$$



$48 \equiv 3 \pmod 9$ ve $14 \equiv 5 \pmod 9$

$48 \times 14 \equiv 3 \times 5 \pmod 9$

$672 \equiv 15 \pmod 9$

$6 \equiv 6 \pmod 9$

Ancak çarpma yanlış olduğu halde sağlamanın doğru çıkması mümkündür. Yukarıdaki çarpma, 48x14=762 şeklinde yanlış hesaplansa bile sağlama yine doğru olur. Neden? (762 ile 672'nin (mod 9) a göre denklik sınıflarını araştırınız.)

$$24x62=1488\,,$$
$$24x62=1452\,,$$
$$24x62=4188$$

çarpmalarından 9'la sağlama işlemi yaparak hangisinin yanlış olduğunu söyleyebilir misiniz? Neden?

İspatını verdiğimiz bu iki teoremden yararlanarak denklik sınıfları arasında toplama ve çarpma işlemleri için şu tanımları verebiliriz.

4–12. Tanım

$\overline{p}$, $\overline{q} \in Z/m$ için,

$$\overline{p} \oplus \overline{q} = \overline{p+q} \quad ; \quad \overline{p} \odot \overline{q} = \overline{p \cdot q}$$

dur.

Bu tanıma dayanarak Z/3 için toplama ve çarpma tablolarını yapalım.

$$Z/3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$$

$\oplus$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

$\odot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Aynı biçimde Z/5 için toplama ve çarpma tablolarını yapalım.

$$Z/5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$$

$\oplus$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

$\odot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Siz de, Z/4 ve Z/7 için toplama ve çarpma tabloları yapınız.

4–7. Örnekler

1) 3^{49} un 5 ile bölümünden elde edilen kalanı bulunuz.

$$3 \equiv 3 \pmod 5$$
$$3^2 \equiv 1 \pmod 5 \qquad \text{(Neden)?}$$
$$(3^2)^{24} \equiv 1 \pmod 5$$
$$3^{48} \equiv 1 \pmod 5$$
$$3^{48}.3 \equiv 1.3 \pmod 5$$
$$3^{49} \equiv 3 \pmod 5$$

O halde 3^{49} un 5 ile bölümünden kalan 3'tür.

2) 7^{25} in 9 ile bölümünden elde edilen kalanı bulunuz.

$$7 \equiv 7 \pmod 9$$
$$7^2 \equiv 4 \pmod 9$$
$$7^4 \equiv 7 \pmod 9$$
$$7^8 \equiv 4 \pmod 9$$
$$7^{16} \equiv 7 \pmod 9$$
$$7^{16}.7^8 \equiv 7.4 \pmod 9$$
$$7^{24} \equiv 1 \pmod 9$$
$$7^{24}.7 \equiv 1.7 \pmod 9$$
$$7^{25} \equiv 7 \pmod 9$$

O halde 7^{25} in 9 ile bölümünden kalan 7 dir.

4–11. Alıştırmalar

1) 4^{15} in 5 ile bölümünden elde edilecek kalanı bulunuz.

2) 3^{25} in (mod 7) ye göre denk olduğu bir sayı bulunuz.

3) 7^{15} in 4 ile bölümünden elde edilen kalanı bulunuz.

4) 8^{45} in 6 ile bölümünden elde edilen kalanı bulunuz.

5) Bir saat kadranı üzerinde $\{0, 1, 2, \ldots, 12\}$ kümesi ile saatlerde kullandığımız toplama işlemine göre bir toplama tablosu yapınız. $Z/12$ deki toplama ile karşılaştırınız.

6) Saat kadranını 5 parçaya bölerek yeni bir saat elde ediniz. Bu saat üzerinde bulacağınız yeni toplama için bir tablo yapınız.

7) Salı gününden itibaren 25. günü söyleyiniz.

8) Her üç günde bir saat nöbet tutan bir er, ilk nöbetini pazartesi günü tutmuştur. 4 üncü nöbetini haftanın hangi gününde tutar?

4–4. Matematik Sistemler

Bir küme ile bu küme üzerinde tanımlanmış bir veya daha çok işleme **sistem** adını vereceğiz. Sözgelimi, doğal sayılar kümesi ile $+$ işlemi $(N, +)$ bir sistem oluşturur. $(Z/5, \oplus)$ $(Z, \oplus, \odot)$ nin erbiri matematik bir sistemdir. Bu sistemler yardımı ile sayıların yapılarını daha iyi anlıyacaksınız. Konuya en genel ve aynı zamanda en sade olan grup kavramı ile gireceğiz.

4–5. Grup

$Z/5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ ve bu küme üzerinde tanımladığımız $\oplus$ işleminin tablosunu yapalım.

$\oplus$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

i) Tabloda sadece Z/5 kümesinin elemanları vardır. O halde Z/5 kümesi $\oplus$ işlemine göre kapalıdır.

ii) $\forall \overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in Z/5$ için bütün olağan halleri deneyerek,

$$\overline{x} \oplus (\overline{y} \oplus \overline{z}) = (\overline{x} \oplus \overline{y}) \oplus \overline{z}$$

olduğunu araştıralım. (Biz sadece bir örnek aldık, bütün olağan hallerin denenmesi gerekir.)

$$\overline{4} \oplus (\overline{3} \oplus \overline{2}) = (\overline{4} \oplus \overline{3}) \oplus \overline{2}$$

$$\overline{4} \oplus \overline{0} = \overline{2} \oplus \overline{2}$$

$$\overline{4} = \overline{4}$$

Bu özelik $\oplus$ işleminin hangi özeliğidir?

iii) $\forall \overline{x} \in Z/5$ için $\overline{x} \oplus \overline{0} = \overline{0} \oplus \overline{x} = \overline{x}$ olmaktadır. O halde 0, $\oplus$ işleminin birim elemanıdır.

iv) $\overline{2} \oplus \overline{3} = \overline{3} \oplus \overline{2} = \overline{0}$ olduğu için $\overline{2}$ ve $\overline{3}$ birbirlerinin tersi olmaktadır. Tablodan $Z/5$ in her elemanının $\oplus$ ya göre tersinin bulunduğunu görünüz.

$(Z/5, \oplus)$ sistemi yukarıda açıklanan dört koşulu da sağlamaktadır.

4–13. Tanım

Herhangi bir A kümesi ve bunun elemanları arasında bir "o" işlemi verilmiş olsun. A ve "o" çifti şu dört aksiyomu sağlıyorlarsa (A , o) sistemine bir **grup** denir.

1) A kümesi "o" işlemine göre kapalıdır.

2) "o" işleminin birleşme özeliği vardır.

3) $\forall x \in A$ için $xoe = eox = x$ koşulunu sağlayan bir $e \in A$ vardır. (Bu $e \in A$ ya birim (etkisiz) eleman denildiğini hatırlayınız.)

4) $\forall x \in A$ için $xoy = yox = e$ koşulunu sağlayan bir $y \in A$ vardır. (Yani $\forall x \in A$ nın tersinin bulunması gerektiğini görünüz ve x'in tersinin x^{-1} ile gösterildiğini hatırlayınız.)

$A = \{a, b, c, d\}$ ve

o	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

A kümesi ve bu kümede "o" işlemi tablo'da olduğu gibi tanımlanmış olsun (A , o) sisteminin bir grup oluşturduğunu gösteriniz.

4–14. Tanım

Bir grupta işlemin değişme özeliği varsa bu gruba **değişmeli grup** denir.

Yukarıdaki grupların bir değişmeli grup olduklarını görünüz.

4–12. Alıştırmalar

1) $Z/4$ ün toplama işlemine göre bir grup oluşturduğunu gösteriniz.

2) $Z/5$ ile bunun üzerinde tanımlanan çarpma işleminin bir grup olmayış nedenlerini araştırınız.

3) $Z/5 - \{\overline{0}\}$ kümesi ve $\odot$ işleminin bir grup oluşturduğunu gösteriniz.

4) Doğal sayılar kümesi toplamaya göre neden bir grup değildir?

5) Tamsayılar kümesinin toplamaya göre bir grup oluşturduğunu gösteriniz.

6) "0" hariç tamsayılar kümesinin çarpmaya göre bir grup oluşturmadığını gösteriniz.

4–6. Halka

Bir kümenin bir işlemle birlikte grup olabilmesi için, belirli bir işleme göre ortaya konan koşulları sağlaması gerekiyordu. Bir grup üzerinde yeni bir işlem daha düşünüp, bu iki işlemle ilgili olarak ek bazı koşullar koyarsak daha özel olan halka ve cisim kavramlarına varırız.

$Z/5$ kümesine A diyelim. $A=\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ olacağını biliyorsunuz. Bu küme üzerinde tanımlanmış $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerini aşağıdaki tablolarla belirtelim.

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

$\odot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

i) $(A, \oplus)$ sisteminin değişmeli bir grup olduğunu göstermiştik. (Birim elemanı 0 dır).

ii) A kümesi $\odot$ işlemine göre kapalıdır.

iii) $\forall \bar{x},\bar{y},\bar{z}\in A$ için bütün olağan haller denenerek,

$$\bar{x}\odot(\bar{y}\odot\bar{z})=(\bar{x}\odot\bar{y})\odot\bar{z} \quad \text{olduğu görülür.}$$

Biz bir örnek verelim,

$$\bar{3}\odot(\bar{2}\odot\bar{4})=(\bar{3}\odot\bar{2})\odot\bar{4}$$
$$\bar{3}\odot\bar{3}=\bar{1}\odot\bar{4}$$
$$\bar{4}=\bar{4} \quad \text{tür.}$$

iv) $\odot$ nin $\oplus$ işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır.

$\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\in A$ için,

$$\bar{x}\odot(\bar{y}\oplus\bar{z})=(\bar{x}\odot\bar{y})\oplus(\bar{x}\odot\bar{z}) \text{ dir.}$$

Sözgelimi,

$$\bar{3}\odot(\bar{2}\oplus\bar{4})=(\bar{3}\odot\bar{2})\oplus(\bar{3}\odot\bar{4})$$
$$\bar{3}\odot\bar{1}=\bar{1}\oplus\bar{2}$$
$$\bar{3}=\bar{3} \quad \text{bulunur.}$$

A kümesi ve $\oplus$, $\odot$ işlemleri gruptan daha özel yeni bir sistem oluşturmaktadırlar.

4–15. Tanım

Herhangi bir A kümesi ile elemanları arasında o , $*$ işlemleri verilmiş olsun.

$(A, o, *)$ sistemi şu dört aksiyomu sağlıyorsa, bu sisteme bir halka denir.

1) (A, o) sistemi değişmeli bir gruptur. (Grubun birim elemanı 0 ile ve $x\in A$ nın o işlemine göre tersi $-x$ ile gösterilir).

2) A kümesi $*$ işlemine göre kapalıdır.

3) $*$ işleminin birleşme özeliği vardır.

4) $*$ işleminin o işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özeliği vardır.

Yukarıdaki örnekte $(A, \oplus, \odot)$ sisteminin halka aksiyomlarını sağladığını görünüz ve bu örneğe benzer biçimde,

$A = \{a, b, c\}$ kümesi ve üzerinde,

o	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$*$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

işlemleri verildiğine göre,

$(A, 0, *)$ sisteminin halka aksiyomlarını sağladığını gösteriniz.

4–13. Alıştırmalar

1) $A = \{ a, b, c \}$ ve

o	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

$\ast$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	b

verildiğine göre, $(A , o , \ast)$ sisteminin bir halka olduğunu gösteriniz.

2) $A=\{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3} \}$ kümesi ve bunun üzerinde aşağıdaki tablolarla belirtilmiş $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri verilmiş olsun.

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

$\odot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

$(A , \oplus , \odot)$ sisteminin bir halka olduğunu gösteriniz.

3) 2. alıştırmada $\bar{x} \odot \bar{2} = \bar{0}$ açık önermesinin doğruluk kümesini bulunuz. (Bir halka içinde sıfırdan farklı iki elemanın çarpımının sıfır olabileceğine dikkat ediniz.

4) $(Z, +, .)$ sisteminin bir halka olduğunu gösteriniz.

5) $Z/5$ te $\bar{3}\bar{x} \oplus \bar{2} = \bar{4}$ açık önermesinin doğruluk kümesini bulunuz.

6) $(Z,+,.)$ halkasında çarpmanın birim elemanının bulunduğunu görünüz.

7) $(A, o, \ast)$ bir halka ve $e \in A$ da (A , o) grubunun birim elemanı olsun. $\forall x \in A$ için,

$$x \ast e = e \ast x = e$$

olduğunu gösteriniz. (Yol gösterme : halka aksiyomlarından,

$$e \ast x = e \ast x$$

$$(e \ast x) o e = (e o e) \ast x$$

$$= (e \ast x) o (e \ast x)$$

eşitliklerinin bulunacağını görünüz ve bundan yararlanınız.)

4–7. Cisim

Halkada olduğu gibi bir A kümesi ve bunun üzerinde tanımlı $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri verilsin. Sözgelimi,

$$A = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4} \} \text{ ve}$$

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

$\odot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

işlemleri verilmiş olsun. Bu sistemin halka olmasının yanısıra, $\odot$ işleminin birim elemanının varlığını, 0 hariç her elemanın $\odot$ işlemine göre tersinin varlığını ve yine $\odot$ işleminin değişme özeliğinin bulunduğunu gösterebilirsiniz.

O halde $(A, \oplus, \odot)$ sistemi halkadan daha başka özel koşulları da taşımaktadır. Şimdi bunun gibi halkadan daha geniş özelikleri bulunan bir sistemin tanımını verelim.

4–14. Tanım

Bir $(A, o, \ast)$ sistemi şu üç aksiyomu sağlıyorsa bu sisteme bir **cisim** denir.

1) (A , o) sistemi değişmeli bir gruptur. (Birim elemanı 0 ile ve $\forall x \in A$ nın tersi $-x$ ile gösterilir.)

2) 0 dışında A kümesi $\ast$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. (Birim elemanı 1 ile ve $\forall x \in A$ nın tersi x^{-1} ile gösterilir.)

3) $\ast$ işleminin o işlemi üzerine dağılma özeliği vardır.

4–6. Örnek

$A = \{ a, b, c, d, e \}$ ve

o	a	b	c	d	e
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c
e	e	a	b	c	d

✳	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	d	e
c	a	c	e	b	d
d	a	d	b	e	c
e	a	e	d	c	b

verildiğine göre, $(A, o, ✳)$ sisteminin bir cisim olduğunu gösterelim.

1) (A , o) sistemi değişmeli bir gruptur.

Birim elemanı a dır. (Neden?) Tablodan a nın tersinin a, b nin tersinin e, c nin tersinin d, d nin tersinin c ve e nin tersinin b olduğunu görünüz.

2) A kümesinde "a" hariç $\{ b, c, d, e \}$ kümesi ✳ işlemine göre değişmeli bir gruptur.

3) ✳ işleminin o işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özeliği vardır. Burada bir örnek veriyoruz. (Bütün mümkün durumların incelenmesi gerekeceğine dikkat ediniz.)

$$b ✳ (c o d) = (b ✳ c) o (b ✳ d)$$

$$b ✳ a = c o d$$

$$a = a \qquad \text{dır.}$$

4–7. Örnek

$Z/3$ te $2x+1=2$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

$Z/3$ te toplam ve çarpım tablolarını yapalım.

⊕	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

⊙	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$2x⊕1=2$ denkleminde, 1 in toplamaya göre tersi olan 2 yi eşitliğin iki yanına ekleyelim.

$$2x⊕1⊕2=2⊕2$$

$$2x=1 \qquad \text{olur.}$$

Şimdi de her iki yanı 2 nin çarpmaya göre tersi olan 2 ile çarpalım.

$$2⊙2x=2⊙1 \qquad \text{den}$$

$$1⊙x=2 ,$$

$$x=2 \qquad \text{bulunur.}$$

Çözüm kümesi $\{2\}$ dir.

4–8. Örnek

$Z/7$ de $4x⊕3=5$ denkleminin çözüm kümesi nedir?

$$4x⊕3=5$$

$$4x⊕3⊕4=5⊕4 \qquad \text{(Toplamaya göre 3 ün tersi 4)}$$

$$4x=2 \qquad \text{(4 ün çarpmaya göre tersi 2 dir.)}$$

$$2⊙4x=2⊙2$$

$$1⊙x=4$$

$$x=4$$

bulunur. Öyleyse, $ç=\{4\}$ dür.

4–14. Alıştırmalar

1) $(Z, +, .)$ sistemi bir cisim değildir. Bunun sebebini bulunuz.

2) $(Z/7, ⊕, ⊙$ sisteminin bir cisim olduğunu gösteriniz.

3) $(Z/4, ⊕, ⊙)$ sistemi neden bir cisim değildir? Araştırınız.

4) $Z/5$ te hangi sayıların kare kökü yoktur?

5) $Z/3$ te $2x+1=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

6) $Z/7$ de $5x+3=4$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

7) 3^{42} nin 5 ile bölümünden elde edilen kalan kaçtır?

8) 7^{4k+2} $(k \in N)$ nın 5 ile bölümünden elde edilecek kalanı bulunuz.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜMLE İLGİLİ TESTLER

1) $(N, +)$ sistemi bir grup değildir. Bunun nedeni aşağıdakilerden hangisidir?

a) N kümesi $+$ işlemine göre kapalı değildir.
b) $+$ işleminin birleşme özeliği yoktur.
c) Birim elemanı yoktur.
d) Her elemanın tersi yoktur.
e) Değişme özeliği yoktur.

2) $(Z, +, .)$ bir cisim değildir. Bunun nedeni aşağıdakilerden hangisidir?

a) $(Z, +)$ değişmeli bir grup değildir.
b) Z de . işleminin birleşme özeliği yoktur.
c) Z de . işleminin birim elemanı yoktur.
d) . işleminin $+$ işlemi üzerine dağılma özeliği yoktur.
e) 0 hariç Z de . işlemine göre her elemanın tersi yoktur.

3) $Z/5$ te $3x+2=4$ denkleminin çözüm kümesi hangisidir?

a) $\{0\}$ b) $\{1\}$ c) $\{2\}$ d) $\{3\}$ e) $\{4\}$

4) $Z/4$ te $2x+3=3$ denkleminin doğruluk kümesi hangisidir?

a) $\{0\}$ b) $\{1\}$ c) $\{0, 2\}$ d) $\{0, 1\}$ e) $\{3\}$

5) 3^{125} in 5 ile bölümünden elde edilecek kalan nedir?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

6) 5^{40} ın 6 ile bölümünden elde edilen kalan nedir?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

7) $(Z/4, \oplus, \odot)$ sistemi bir cisim değildir. Bunun nedeni şunlardan hangisidir?

a) $(Z/4, \oplus)$ değişmeli grup değildir.
b) $Z/4$ te $\odot$ işleminin birim elemanı yoktur.
c) $Z/4$ te $\odot$ işleminin birleşme özeliği yoktur.
d) $Z/4$ te $\odot$ işleminin $\oplus$ işlemi üzerine dağılma özeliği yoktur.
e) $Z/4$ te her elemanın $\odot$ işlemine göre tersi yoktur.

8) $Z/5$ te $3+2(4+3)+2^{-1}+(-2)$ işleminin sonucu nedir?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

9) Grupta $(x \circ y \circ z)^{-1}$, aşağıdakilerden hangisine denktir?

a) $x^{-1}oy^{-1}oz^{-1}$ b) $x^{-1}oz^{-1}oy^{-1}$ c) $y^{-1}oz^{-1}ox^{-1}$
d) $z^{-1}ox^{-1}oy^{-1}$ e) $z^{-1}oy^{-1}ox^{-1}$

10) $|2x+3|<4, (x \in Z)$ önermesinin doğruluk kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1\}$ b) $\{-3, -2, -1, 0, 1\}$
c) $\{-3, -2, -1, 0\}$ d) $\{-4, -2, -1, 0, 1\}$
e) Hiçbiri.

BEŞİNCİ BÖLÜM

RASYONEL VE REEL SAYILAR

Bu bölümde tam sayılar kümesini kapsayan ve $+,.$ işlemlerine göre cisim olan rasyonel ve reel sayılar kümelerini inceleyeceğiz. Bu sistemde sıfırdan başka her sayının çarpmaya göre tersi olacak ve sıralamada bulunacaktır.

5-1. Rasyonel Sayılar

Z tamsayılar kümesinin özeliklerini gördünüz. Şimdi bu kümeden yararlanarak başka bir K kümesi tanımlayacağız. K kümesinin elemanları, ikinci terimi sıfırdan farklı olan tamsayı ikilileri olacaktır. Ancak bu ikililerle, bundan önceki kesimde incelenen ikilileri karıştırmamak için virgül yerine " : " koyacağız. Söz gelimi, $(7 : -5)$ ikilisi K nın bir elemanı olacaktır. Kısaca K kümesi p, $q \in Z$ ve $q \neq 0$ olmak üzere $(p : q)$ ikililerinden oluşan bir kümedir. Buna göre, $(2 : -3)$, $(6 : -3)$, $(-7 : 15)$, $(1 : 2)$ ikilileri K nın elemanlarıdır. $(0 : -1)$, $(0 : 5)$ ikilileri de K'da olacaktır. Fakat $(5 : 0)$, $(-1 : 0)$, $(0 : 0)$ ikililerinin K nın elemanları olamıyacağına dikkat ediniz.

5-1. Tanım

$$K = \{(p : q) | p , q \in Z \text{ ve } q \neq 0\}$$

kümesinin her elemanına **kesir** denir. $(p : q)$ kesrinden p'ye kesrin **payı**, q'ya da kesrin **paydası** denir. Sözgelimi,

$(-5 : 3) \in K$ olduğundan $(-5 : 3)$ bir kesirdir. Bu kesrin payı -5 ve paydası 3 tür.

Uyarma : Her $p \in Z$ için $(p : 0)$ bir kesir değildir.

Şimdi K kümesi üzerinde şöyle bir $\sim$ bağıntısı tanımlayalım

$$(p : q) \sim (r : s) \iff ps = qr$$

olsun.

Bu tanıma göre,

$(1 : 2) \sim (2 : 4)$ ve $(-6 : 3) \sim (-12 : 6)$ dır. Çünkü $1.4 = 2.2$ ve $-6.6 = -12.3$ tür.

K üzerinde tanımlanan bu $\sim$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğu kolayca gösterilebilir. Gerçekten,

1. Her $(p : q) \in K$ için,

$(p : q) \sim (p : q) \iff p.q = .qp$ dir.

O halde bu bağıntı yansıyandır.

2. Her $(p : q) , (r : s) \in K$ için,

$(p : q) \sim (r : s) \Rightarrow (r : s) \sim (p : q)$ dur.

Çünkü birinci taraf $p.s = q.r$ anlamında, ikinci taraf ta $r.q = s.p$ anlamındadır. Tamsayılarda çarpmanın değişme özeliği göz önüne alınırsa iki tarafın eşit olduğu anlaşılır. O halde bu bağıntı simetriktir.

3. Her $(p : q) , (r : s) , (t : u) \in K$ için,

$(p : q) \sim (r : s)$ ve $(r : s) \sim (t : u) \Rightarrow (p : q) \sim (t : u)$ dur.

Gerçekten, $(p : q) \sim (r : s)$ den $p.s = q.r$ ve $(r : s) \sim (t : u)$ dan $r.u = s.t$ bulunur. Elde edilen iki eşitlik taraf tarafa çarpılarak $p.s.r.u = q.r.s.t$ eşitliği bulunur. Tamsayılarda çarpmanın değişme ve sadeleştirme özeliklerinden $p.u = q.t$ bulunur. Bu ise, $(p : q) \sim (t : u)$ demektir. Böylece $\sim$ bağıntısının geçişken olduğu da gösterilmiş olur.

Bu denklik bağıntısının K yı denklik sınıflarına ayıracağını biliyorsunuz. Söz gelimi,

$$(1 : 3) , (2 : 6) , (3 : 9) , \ldots , (x : 3x) , \ldots$$

ikilileri aynı denklik sınıfına aittirler. Yani,

$$(1 : 3) \sim (2 : 6) \sim (3 : 9) \sim \ldots \sim (x : 3x) \sim \ldots$$

dir. Bunların sınıfını kısaca,

$$\{ (x : 3x) | x \in Z \text{ ve } x \neq 0 \}$$

biçiminde belirtebiliriz.

Bundan böyle "$\sim$" yerine "$=$" işaretini kullanalım. $(p : q)$ yerine de $\frac{p}{q}$ yazalım. Buna göre $(1 : 3) \sim (2 : 6)$ koşulu $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ haline gelir.

Ayrıca $q \in N^+$ için $\frac{p}{-q}$ yerine $\frac{-p}{q}$ veya $-\frac{p}{q}$ yazacağız. Şimdi rasyonel sayıların tanımını verelim.

5–2. Tanım

Kesirler kümesi olan K nın yukarıda belirtilen $\sim$ bağıntısının ayırdığı denklik sınıflarının her birine bir rasyonel sayı denir. Rasyonel sayılar kümesi Q harfi ile gösterilir.

Bu tanıma göre K nın denk olan iki elemanı (iki kesir) aynı rasyonel sayıyı gösterir. Söz gelimi

$$\frac{1}{3} = \frac{-14}{-42} = \frac{2}{6} = \ldots = \frac{x}{3x}, \quad (x \neq 0)$$

aynı rasyonel sayıdır.

5–1. Teorem

$\frac{a}{b} \in Q$, $c \in Z$ ve $c \neq 0$ olsun.

$\frac{a}{b} = \frac{ca}{cb}$ dir.

(Eşitliğin solundaki ifadeye sağındakinin sadeleştirilmişi, sağındakine de solundakinin genişletilmişi denir.)

İspat :

$$\frac{a}{b} = \frac{ca}{cb} \iff acb = bca \qquad (\sim \text{Yani } \text{“}=\text{”} \text{ in tanımı})$$

Örneğin,

$$\frac{16}{64} = \frac{1.16}{4.16} = \frac{1}{4}, \qquad \frac{0}{1} = \frac{0.10}{1.10} = \frac{0}{10}$$

yazabiliriz.

Şimdi de rasyonel sayıların toplama ve çarpmalarını görelim.

5–3. Tanım

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q$ olsun.

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

2. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

NOT : Paydaları eşit iki rasyonel sayının toplamı :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{cb+bc}{b.b}$$

$$= \frac{b(a+c)}{b.b}$$

$$= \frac{a+c}{b}$$

olacağını görünüz. Paydaları eşit olmayan rasyonel sayıların toplamında payda eşitleyerek bu özeliği kullanınız.

Örneğin,

$$\frac{5}{7} + \frac{3}{14} = \frac{10}{14} + \frac{3}{14} = \frac{13}{14}$$

5–1. Örnekler

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3+3}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

b) $\frac{3}{4} + \frac{-5}{6} = \frac{9}{12} + \frac{-10}{12} = \frac{-1}{12}$

c) $\frac{3}{1} + \frac{2}{1} = \frac{5}{1}$

d) $\frac{3}{4} + \frac{-3}{4} = \frac{12-12}{16} = \frac{0}{16}$

e) $\frac{3}{4} \cdot \frac{-5}{6} = \frac{-15}{24} = \frac{-5}{8}$

f) $\frac{3}{1} \cdot \frac{4}{1} = \frac{12}{1}$

g) $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1} = \frac{3}{4}$

h) $\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{15}{15} = \frac{1}{1}$

Yukarıdaki (c) ve (f) örneklerinde olduğu gibi,

$$\frac{a}{1}, \frac{b}{1} \in Q$$

biçimindeki rasyonel sayıların toplaması ve çarpmasına dikkat edelim.

a) $\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a+b}{1}$

b) $\frac{a}{1} + \frac{0}{1} = \frac{a}{1}$

c) $\frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{ab}{1}$

d) $\frac{a}{1} \cdot \frac{0}{1} = \frac{0}{1}$

e) $\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{1}$

Bu örneklerde gördüğünüz rasyonel sayıların çizgilerini ve paydalarındaki 1'leri kaldırsak Z tamsayılar kümesinin elemanlarını ve bunlarla ilgili toplama ve çarpmanın özeliklerini elde ederiz. Öyleyse $\frac{a}{1}$ biçimindeki rasyonel sayıları a tamsayıları olarak tanımlamakta hiçbir sakınca yoktur.

Bu nedenle $N \subset Z \subset Q$ olduğunu ifade edebiliriz.

Q da toplama ve çarpmanın birim elemanları vardır. Bunları gösterelim.

Her $\frac{x}{y} \in Q$ için,

$$\frac{x}{y} + \frac{0}{1} = \frac{0}{1} + \frac{x}{y} = \frac{x}{y}$$

dir. O halde toplamanın birim elemanı

$$(0:1)\ ,\ (0:2)\ ,\ (0:3)\ ,\ \ldots.,\ (0:r)\ \ldots$$

denklik sınıfını temsil eden $\frac{0}{1}$ veya kısaca 0 dır. ($r \neq 0$ olduğunu görünüz.) Gene her $\frac{x}{y} \in Q$ için,

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x}{y}$$

dir. O halde çarpmanın birim elemanı, $(1:1)\ ,\ (2:2)\ ,\ (3:3)\ ,\ \ldots,$ $(s:s)\ \ldots$ denklik sınıfını temsil eden $\frac{1}{1}$ veya kısaca 1 dir. ($s \neq 0$ olduğunu görünüz.)

Şimdi de Q daki her elemanın toplamaya göre terslerini inceleyelim.

Her $\frac{x}{y} \in Q$ için,

$$\frac{x}{y} + \frac{-x}{y} = \frac{-x}{y} + \frac{x}{y} = \frac{0}{y} = 0$$

olduğundan Q da her elemanın toplamaya göre bir tersi vardır. Örneğin,

$\frac{2}{3}$ ün tersi $\frac{-2}{3}$; $\frac{-5}{2}$ nin tersi ise $\frac{5}{2}$ dir. Çünkü,

$$\frac{2}{3} + \frac{-2}{3} = \frac{-2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

ve,

$$\frac{-5}{2} + \frac{5}{2} = \frac{5}{2} + \frac{-5}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

dir.

Aynı biçimde,

Her $\frac{x}{y} \in Q$ ve $x \neq 0$ için,

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = \frac{xy}{yx} = \frac{1}{1} = 1$$

olduğundan Q da $\frac{0}{y}$ hariç her elemanın çarpmaya göre bir tersi vardır.

$\frac{x}{y}$ nin çarpmaya göre tersi $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}$ ile gösterilir. $\left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x}$ olduğuna dikkat ediniz. Sözgelimi, $\frac{4}{5}$ sayısının çarpmaya göre tersi $\frac{5}{4}$; $\frac{-3}{5}$ in tersi $\frac{-5}{3}$ tür. Çünkü,

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{1} = 1$$

ve,

$$\frac{-3}{5} \cdot \frac{-5}{3} = \frac{-5}{3} \cdot \frac{-3}{5} = \frac{1}{1} = 1$$

dir. Örneğin, $\frac{0}{7}$ nin çarpmaya göre tersinin olmadığı şöyle gösterilebilir.

Bir $\frac{x}{y} \in Q$, $\frac{0}{7}$ nin tersi olsaydı, $\frac{0}{7} \cdot \frac{x}{y} = 1$ olması gerekirdi. Oysa $\frac{0}{7} \cdot \frac{x}{y} = 0$ dır. O halde genel olarak $y \in Z$ olmak üzere $\frac{0}{y}$ rasyonel sayısının (yani 0'ın) çarpmaya göre tersi yoktur.

$\frac{a}{1}$ rasyonel sayısının, yani a'nın çarpmaya göre tersinin $\frac{1}{a}$ olacağına dikkat ediniz $(a \neq 0)$

Q kümesinin + ve . işlemlerine göre bir cisim yaptığını artık gösterebilirsiniz. Cisim aksiyomlarını hatırlayarak her birinin sağlandığını kendiniz gösteriniz.

Bir cisimde sadece iki işlem bulunduğunu hatırlayınız. Burada işlemlerimiz toplama ve çarpmadır. Çıkarma ve bölme dediğimiz işlemler ilk iki işlemden farklı işlemler değildir. Bu ilişkinin iyi anlaşılması için çıkarma ve bölme işlemlerini tanımlayalım.

5–4. Tanım

Çıkarma işlemi,

Her $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q$ için,

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(\frac{-c}{d}\right)$$

dir.

Bu tanıma göre bir rasyonel sayıdan diğer bir rasyonel sayıyı çıkarmak, çıkarılacak rasyonel sayının toplamaya göre tersini ilk sayıyla toplamak anlamındadır.

O halde,

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(\frac{-c}{d}\right) = \frac{ad-bc}{bd}$$

dir.

5–2. Örnek

a) $\frac{6}{5} - \frac{4}{3} = \frac{6}{5} + \frac{-4}{3} = \frac{18-20}{15} = \frac{-2}{15}$

b) $\frac{10}{14} - \frac{2}{9} = \frac{90-28}{126} = \frac{62}{126} = \frac{31}{63}$

c) $\frac{2}{9} - \frac{10}{14} = \frac{28-90}{126} = \frac{-62}{126} = \frac{-31}{63}$

(b) ve (c) örnekleri ayrıca çıkarmanın değişme özeliği olmadığını göstermektedir.

5–5. Tanım

Bölme işlemi,

Her $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q$ ve $\frac{c}{d} \neq 0$ için,

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} \text{ dir.}$$

Bu tanıma göre iki rasyonel sayının bölümünü bulmak için bölüneni, bölenin çarpmaya göre tersi ile çarparız.

5–3. Örnek

a) $\frac{3}{4} : \frac{4}{7} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^{-1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{4} = \frac{21}{16}$

b) $\frac{-4}{9} : 2 = \frac{-4}{9} \cdot \left(\frac{2}{1}\right)^{-1} = \frac{-4}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-4}{18} = \frac{-2}{9}$

c) $\frac{1}{2}x = \frac{1}{3}$

denklemini Q da çözelim.

Çözüm :

$$2x + \frac{3}{5} = \frac{1}{3} \iff \frac{1}{2} \cdot (2x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5}\right) \iff$$

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{5-9}{15} \iff x = \frac{1}{2} \cdot \frac{-4}{15} = \frac{-2}{15}$$

5–1. Alıştırmalar

1) Aşağıdakileri çözünüz. Çözümde, rasyonel sayılarda kullandığımız özeliklerini belirtiniz. (Harfler rasyonel sayıları göstermektedir.)

a) $\frac{2x}{3} = 4$

b) $3x + \frac{2}{5} = \frac{1}{3}$

c) $\frac{5y-1}{4} - 1 = \frac{3}{5}$

d) $\frac{2(1-x)}{x-1} = \frac{3x}{5} + 2$

e) $\frac{3}{2} - \frac{4(x+1)}{3} = \frac{2(3+x)}{3} - 2x$

Şimdi de rasyonel sayıların sıralama özeliklerini inceliyelim.

5–6. Tanım

$\frac{a}{b} \in Q$ olsun

i) $ab > 0$ ise $\frac{a}{b} > 0$,

ii) $ab < 0$ ise $\frac{a}{b} < 0$

dır. Bu tanıma göre bir rasyonel sayının pay ve paydası aynı işaretli ise rasyonel sayı pozitif, ters işaretli ise negatif olur.

5–4. Örnek

a) $\frac{3}{7} > 0$ dır. Çünkü $3.7 > 0$ dır.

b) $\frac{-2}{-5} > 0$ dır. Çünkü $(-2).(-5) > 0$ dır.

c) $\frac{-3}{8} < 0$ dır. Çünkü $(-3).8 < 0$ dır.

5–7. Tanım

$\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q$ olsun.

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} < 0 \text{ ise } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ dir.}$$

NOT : Bu tanımın,

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff \frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{c}{d}, \left(\frac{x}{y} \in Q^+\right)$$

tanımı ile denk olduğunu görünüz.

5–5. Örnek

a) $\frac{7}{8} - \frac{10}{11} = \frac{-3}{88}$ olduğundan $\frac{7}{8} < \frac{10}{11}$ dir.

(İkinci tanım gereğince, $\frac{7}{8} + \frac{3}{88} = \frac{10}{11}$ olduğundan gene $\frac{7}{8} < \frac{10}{11}$ dir.)

b) $-\frac{3}{4} < -\frac{2}{3}$ tür, çünkü $\frac{-3}{4} - \frac{-2}{3} = \frac{-1}{12}$ dir.

c) $\frac{5}{8} < \frac{2}{3}$ tür, çünkü $\frac{5}{8} - \frac{2}{3} = \frac{-1}{24}$ dir.

d) $\frac{2}{5}, \frac{3}{7} \in Q$ için, $\frac{3}{7} - \frac{2}{5} = \frac{15-14}{35} = \frac{1}{35} < 0$ olduğundan $\frac{2}{5} < \frac{3}{7}$ dir.

5–7. Tanımdan şu sonuçlara da varabiliriz :

$b>0$ ve $d>0$ için,

$ad-bc>0$ ise $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ ve,

$ad-bc=0$ ise $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$ad-bc<0$ ise $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dir.

Buna göre iki rasyonel sayı için yalnız ve ancak şu üç halden biri doğrudur.

$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ (Üç hal kuralı)

5–2. Alıştırmalar

1) Aşağıdaki rasyonel sayı çiftleri arasındaki sıralamayı belirtiniz.

a) $\frac{2}{3}$ ve $\frac{5}{7}$

b) $\frac{5}{7}$ ve $\frac{12}{17}$

c) $x<y$ olduğuna göre $\frac{x}{5}$ ve $\frac{y}{4}$

d) $x<0$ olduğuna göre $\frac{3x+5}{3}$ ve $2x+1$

2) Aşağıdaki rasyonel sayıları bir eşitsizlik zinciri biçiminde sıralayınız ve yaptığınızı sağlayınız.

$$\frac{-37}{16}, \frac{4}{5}, 2, \frac{-12}{20}, \frac{47}{59}, \frac{27}{13}$$

3) $0 < \frac{1}{a} \iff 0<a$ olduğunu ispat ediniz.

4) $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \iff ad > bc$, $(b, d \neq 0)$

olduğunu ispat ediniz.

5) a, b, c, d tamsayılar ve $bdf \neq 0$ olduğuna göre,

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ ve } \frac{c}{d} < \frac{e}{f} \text{ ise } \frac{a}{b} < \frac{e}{f}$$

olduğunu ispat ediniz. (Geçişme)

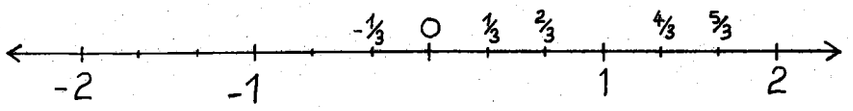
Q cisminde de N ve Z de olduğu gibi Arşimet özeliği vardır. Yani r ve s pozitif rasyonel sayılar ve $r<s$ ise $nr>s$ şartını sağlayan pozitif bir n tam sayısı vardır. Bunu doğal ve tam sayılar özeliklerini kullanarak ispatlamaya çalışınız.

N ve Z kümelerinin "seyrek" olma özeliğine sahip olduğunu hatırlayacaksınız. a ve b herhangi iki tamsayı olduğuna göre $|a-b| \geq 1$ idi. Bu özeliğin Q da olmadığını göstereceğiz. Bunu farklı iki rasyonel sayı arasında bu iki sayıdan da farklı bir üçüncü rasyonel sayının var olduğunu ispatlamakla göstermiş oluruz. $a \neq b$ olmak üzere a,b rasyonel sayıları verilmiş olsun. $a<b$ kabul edelim. $\frac{a+b}{2}$ rasyonel sayısını gözönüne alalım. $a<b$ kabul ettiğimiz için $2a<a+b$ ve $a+b<2b$ dir. O halde,

$a < \frac{a+b}{2}$ ve $\frac{a+b}{2} < b$ olur. Öyleyse, $a < \frac{a+b}{2} < b$

dir. Bu yeni rasyonel sayı ile ilk sayılardan herbiri arasında bir başka rasyonel sayı olduğu benzer biçimde gösterilir. Bu yeni sayılarla öncekiler arasında gene rasyonel sayılar olduğu aynı biçimde gösterilir v.b. Bu özelik nedeniyle rasyonel sayılar "yoğun" dur deriz.

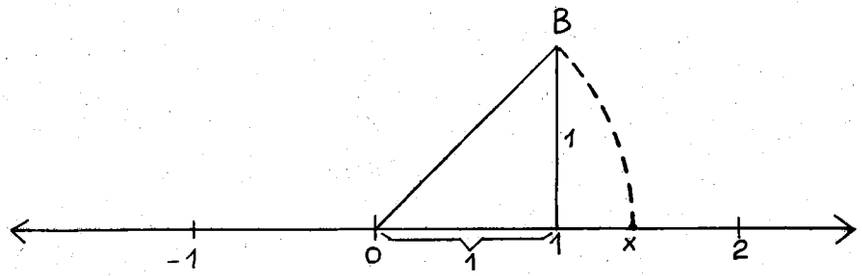
Tamsayıların sayı ekseni dediğimiz bir doğru üzerinde nasıl yerleştirilebileceğini gördünüz. Rasyonel sayıları da benzer biçimde aynı eksen üzerine yerleştirebiliriz. Sözgelimi, $\frac{1}{3}$ rasyonel sayısını, uçları 0 ile 1 sayılarına karşılık gelen doğru parçasını üç eşit parçaya bölerek bu eksen üzerine yerleştirebiliriz. $\frac{1}{3}$ ün yeri bu bölmede 0'dan sonraki ilk işaret edilen nokta olacaktır. (5–1. Şekil) i inceleyiniz.



(5–1. Şekil)

Herhangi bir rasyonel sayıyı da benzer yolla sayı ekseni üzerine yerleştirebiliriz. Her rasyonel sayı çifti arasında bir üçüncü rasyonel sayı bulunabileceğinden, yani rasyonel sayılar kümesi yoğun olduğundan, sayı ekseninin rasyonel sayılarla tamamen doldurulabileceği düşünülebilir. Ancak, bunun böyle olmadığını bir örnekle gösterebiliriz.

Dik kenarları birim uzunlukta olan ve bir dik kenarı şekilde gösterildiği biçimde sayı ekseni üzerinde bulunan bir dik üçgen düşünelim (5–2. Şekil).



(5–2. Şekil)

$|OB|^2=2$ dir. Pergelimizin sivri ucunu O'ya batırarak OB uzunluğunda açar ve bir yay çizersek bu yay sayı eksenimizi bir x noktasında keser. $|OB|^2=2$ olduğuna göre $|OB|$ uzunluğu, dolayısıyla $|Ox|$ uzunluğu, karesi 2 ye eşit olan bir sayının rasyonel bir sayı olmadığını gösterirsek x'in bir rasyonel sayıya karşılık gelmediğini, yani rasyonel sayıların sayı eksenini tamamen doldurmadığını göstermiş oluruz. Şimdi karesi 2 olan sayının bir rasyonel sayı olmadığını gösterelim. Bu sayı, yani [0B] hipotenüsünün ölçüsü rasyonel bir sayı olsaydı bunu p ve q aralarında asal ve $p, q \in N^+$ olmak üzere $\frac{p}{q}$ biçiminde yazabilirdik. Bu takdirde, $\frac{p}{q} \cdot \frac{p}{q} = 2$ yani $p^2=2q^2$ olurdu. $q \in N^+$ olmak üzere q ne olursa olsun $2q^2$ çift olacağından p de çift olur. Halbuki, ancak bir çift sayının karesinin çift olacağını biliyoruz. O halde p çift olmak zorundadır. Bunu $p \in N^+$ olmak üzere $p=2p_1$ biçiminde yazabiliriz. $p^2=2q^2$ de p yerine $2p_1$ yazarsak,

$$4p_1^2=2q^2 \quad \text{veya} \quad 2p_1^2=q^2$$

elde ederiz. $2p_1^2$ çift olduğundan q^2 de çift olur. O halde $q=2q_1$ Koşuluna uygun bir $q \in N^+$ olması gerekir. Böylece p ve q nun bir ortak çarpanı olduğu ortaya çıkar. p ile q aralarında asal kabul edildiği için bu olanaksızdır. Öyleyse $\left(\frac{p}{q}\right)^2$ hiçbir zaman 2 ye eşit olamaz. O halde, x noktasına karşı gelen sayı rasyonel değildir. Yani, sayı ekseni rasyonel sayılarla doldurulamaz.

Rasyonel Sayılarla Ondalık Kesirler Arasındaki Bağıntı

Bir rasyonel sayının payını paydasına bölerek bu rasyonel sayıyı ondalık kesir biçiminde ifade edebiliriz. Örnek olarak $\frac{123}{8}$ rasyonel sayısını ondalık kesir biçiminde ifade etmek istersek,

$$\begin{array}{r|l}
123 & 8 \\ \cline{2-2}
-\ 8 & 15{,}375 \\ \cline{1-1}
43 & \\
-\ 40 & \\ \cline{1-1}
030 & \\
-\ 24 & \\ \cline{1-1}
060 & \\
-\ 56 & \\ \cline{1-1}
040 & \\
-\ 40 & \\ \cline{1-1}
00 &
\end{array}$$

$\frac{123}{8} = 15,\ 375$ elde edilir. Bölmeyi daha da sürdürseydik, dördüncü ondalık basamaktan itibaren bütün rakamları 0 olarak elde ederdik. Yani, $\frac{123}{8} = 15{,}375000$ olurdu. Bu ondalık sayıya $\frac{123}{8}$ in ondalık açılımı diyeceğiz. Diğer bazı rasyonel sayıların ondalık açılımları da şöyledir :

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad \frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$$

$$\frac{1}{4} = 0{,}25 \qquad \frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots$$

$$\frac{1}{8} = 0{,}125 \qquad \frac{1}{7} = 0{,}142857\ 142857\ldots$$

$$\frac{1}{5} = 0{,}2 \qquad \frac{1}{9} = 0{,}111\ldots$$

Yukarda sağ taraftaki sayıların ondalık açılımları bir yerde kesilmemekte, belirli bir basamaktan sonra bir basamaklar dizisi arka arkaya tekrarlanmaktadır. Söz gelimi, $\frac{1}{7}$ nin ondalık açılımında ilk altı basamak 142857 dir. Bu altı basamaklı dizi arka arkaya devretmektedir. $\frac{1}{9}$ un ondalık açılımında ise devreden basamak sayısı birdir. Bu ondalık açılımlara devirli ondalık açılımlar diyeceğiz ve devreden sayı dizisini, üstüne bir çizgi çekmekle belirteceğiz.

$$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$$

$$\frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$$

$$\frac{1}{7} = 0{,}\overline{142857}$$

$$\frac{1}{9} = 0{,}\overline{1} \quad \text{gibi,}$$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}$ rasyonel sayılarının ondalık açılımlarında ise belli bir basamaktan sonra sadece 0 devredecektir. Bunlara da devirli ondalık açılım diyebiliriz ve şöyle gösterebiliriz :

$$\frac{1}{2} = 0{,}5\overline{0} \qquad \frac{1}{4} = 0{,}25\overline{0} \quad \text{(v.b.)}$$

Bu kabule göre şu teoremi ifade edebiliriz.

5–2. Teorem

Her rasyonel sayının bir devirli ondalık açılımı vardır.

Teoremin ispatının iyi anlaşılması için önce bir örnek üzerinde duracağız. $\frac{11}{7}$ nin ondalık açılımını bulalım.

$$\begin{array}{r|l}
11{,}000000 & 7 \\ \cline{2-2}
-\ 7 & 1{,}571428 \\ \cline{1-1}
40 & \\
-\ 35 & \\ \cline{1-1}
50 & \\
-\ 49 & \\ \cline{1-1}
10 & \\
-\ 7 & \\ \cline{1-1}
30 & \\
-\ 28 & \\ \cline{1-1}
20 & \\
-\ 14 & \\ \cline{1-1}
60 & \\
-\ 56 & \\ \cline{1-1}
4 &
\end{array}$$

Bölmeyi daha fazla sürdürmeye gerek yoktur. Çünkü her defasında bölünenden bir sıfır indirerek 4 kalanını ikinci kez elde etmiş bulunmaktayız. Bu, artık bölümde aynı rakamların aynı sırayla yeniden gözükeceğini gösterir. Yani 8 den sonra yine sırayla 5, 7, 1, 4, 2, 8 sayıları gelecektir.

Bölünenin sıfırdan farklı bütün basamaklarını indirdiğimizde sıfırdan farklı bir kalan elde ettiğimizi düşünelim. (Örneğimizde yukarıdan 0 indirmeden önce elde edilen kalan 4 tür.) Bu kalanın ikinci kez tekrarından sonra bölmeye devam edersek yukarıdan yine bir 0 indirmemiz gerekecektir. Bölmeye buradan itibaren devam edersek aynı kalanları aynı sırayla tekrar elde ederiz. Buna bağlı olarak bölümde de aynı rakamlar aynı sırayla tekrar elde edilir. (Örneğimizde 8 den sonra 5, 7, 1, 4, 2 nin tekrar elde edildiği gibi). Bölmeye devam ettikçe bu sayı dizisi ardarda devredecektir.

Bu gözlemimize dayanarak bölünenin sıfırdan farklı bütün basamaklarını indirdikten sonra kalanlardan birinin birden fazla tekrarlanacağını gösterirsek teoremimizi kanıtlamış oluruz. Şimdi bu ispatı yapalım.

Bölen sıfırdan farklı bir doğal sayıdır. (p/q da q nun N^+ ın bir elemanı gibi düşünüleceğine dikkat ediniz.) Buna n diyelim. Kalanların tümü n'den küçüktür ve bunlar $\{0, 1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ kümesinin birer elemanıdır. Bu kümenin eleman sayısı n dir. O halde n'den fazla kalanın bulunduğu bir dizide bu sayılardan en az biri iki defa tekrarlanmıştır. Bölmeyi uzun bir kalanlar dizisi elde edecek biçimde sürdürebiliriz. Bölmeyi n tane sıfır indirecek kadar sürdürürsek kalanlardan en az bir tanesinin tekrarlandığı bir kalanlar dizisi elde ederiz. Böyle ikinci defa elde edilen bir kalanın arkasından her defasında bir tane 0 indirmek gerektiğinden bu andan itibaren bölümün basamakları arasında bir devir elde etmiş oluruz. Bundan sonra da bu tekrarlanma birbiri arkasından sürer gider.

Böylece bir rasyonel sayının ondalık açılımının devirli olacağını ispatlamış olduk. Fazla olarak devreden basamaklar dizisindeki rakam sayısının bölenden büyük olamayacağını da saptadık. Herhangi bir kalan 0 olduğu zaman bölümdeki devir o anda biter. (Yani 0 devretmeye başlar.) Eğer bitmiyorsa kalanlar için n—1 mümkün hal vardır. O halde devreden dizinin basamak sayısı en az 1 ve en çok bölenden bir eksik olur. 1/7 nin ondalık açılımında altı basamaklı bir dizinin devrettiğine dikkat ediniz.

Karşıt olarak her devirli ondalık açılımın bir rasyonel sayı gösterdiği ispatlanabilir. Bunu da örneklerle göstereceğiz.

5–6. Örnek

$x=0,\overline{123}$ olsun. İki tarafı 10^3 ile çarparsak,

$10^3x=123,\ \overline{123}=123+0,\overline{123}=123+x$

$(10^3-1)x=123$ veya $999x=123$

ve buradan da,

$$x=\frac{123}{999}$$

elde ederiz.

5–7. Örnek

$x=3,7\overline{281}$ olsun. İki tarafı 10 ile çarparsak,

a) $10x=37,\overline{281}$ elde ederiz. Bunun iki tarafını da 10^3 ile çarparsak,

b) $10^4x=37281,\overline{281}=37281+0,\overline{281}$ elde ederiz.

(b) eşitliğinden (a) eşitliğini taraf tarafa çıkarırsak,

$$9990x=37244$$

ve,

$$x=\frac{37244}{9990}$$

elde ederiz.

Başka bir örnek olarak ta 9 sayısının devrettiği bir ondalık açılım inceliyelim. Örneğin, $x=0,4\overline{9}$ olsun. Diğer örneklerdeki yolla,

$$10^2x=49,\overline{9}$$
$$-\ 10x=4,\overline{9}$$
$$90x=45$$
$$x=\frac{45}{90}=0,5\overline{0}=0,5$$

elde ederiz. Burada x rasyonel sayısının değişik iki ondalık açılımı olduğu görülmektedir. Yani $x=0,5\overline{0}=0,4\overline{9}$ dur. O halde devreden 9 yerine 9 dan önceki sayıya 1 katmakla 0 ın devrettiği bir açılım elde ediyoruz. Her iki açılım da aynı rasyonel sayıya eşit olmaktadır.

Genel olarak,

$$a, b, c, \ldots, p \in N \text{ ve } p \neq 9 \text{ olmak üzere,}$$

$$x = a, bc \ldots p\overline{9}$$

biçimindeki bir açılım,

$$x = a, bc \ldots (p+1)$$

biçiminde ifade edilebilir. Yani belli bir basamaktan sonra 9 lar halinde devreden açılımlar, yukarıda açıklandığı gibi 9 lar yerine 0 ın devrettiği bir açılım halinde yazılabilir. Bunun tersi de doğrudur. Yani belli bir basamaktan sonra sıfırların devrettiği bir ondalık açılım 0 dan önceki rakamı bir azaltmak suretiyle 9 larla devreden bir ondalık açılım halinde yazabiliriz. ($x = 0,5\overline{0} = 0,4\overline{9}$ örneğinde olduğu gibi)

Bu nedenle, her rasyonel sayının 9 lar halinde devretmeyen fakat devirli bir ondalık açılım vardır ve böyle devirli her ondalık açılım bir rasyonel sayı ile ifade edilebilir. O halde, rasyonel sayılarla devirli ondalık açılımlar (devirli ondalık kesirler) arasında bir bire-bir eşleme vardır.

5-3. Alıştırmalar

1) Aşağıdaki rasyonel sayıların herbiri için bir ondalık açılım bulunuz.

a) $\frac{7}{9}$ b) $\frac{2}{12}$ c) $\frac{11}{16}$

d) $\frac{30}{70}$ e) $\frac{63}{51}$

2) Aşağıdaki açılımların herbirinin gösterildiği rasyonel sayıyı bulunuz.

a) $0,\overline{5}$ b) $0,1\overline{6}$ c) $0,43\overline{12}$

d) $1,294\overline{7}$ e) $3,51\overline{372}$

3) $1,\overline{9} = 2,\overline{0}$ olduğunu ispat ediniz.

4) $\frac{3}{2x-12} = \frac{1}{2}$ olması için $x \in Q$ ne olmalıdır?

5) $(Q,+,.)$ sisteminin bir cisim olduğunu ispat ediniz.

6) Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) $\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} : \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{5}\right)$

b) $\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{2}{7}\right)^{-1}$

c) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} + \frac{1}{5} - \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{-1}\right] : 3\frac{1}{4}$

d) $$\frac{\dfrac{\frac{3}{5}+1}{\frac{2}{9}-1} - 1}{\dfrac{2}{7} + \dfrac{\frac{1}{3}+\frac{5}{2}}{\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}}}$$

e) $$\frac{3}{3+\dfrac{1}{3+\frac{1}{3}}}$$

f) $$\frac{3}{3-\dfrac{1}{3-\dfrac{1}{3-\frac{1}{3}}}}$$

7) Ardışık iki 1 arasına her seferinde bir fazla 0 konarak yazılan 0,1010010001... ondalık açılımının devirli olmadığını görünüz. Öyleyse rasyonel sayılara karşılık gelmeyen ondalık açılımlar da vardır. Böyle başka açılımlar bulunuz.

8) $a,b \in Q^+$ ve $a<b$ ise $a^2<ab<b^2$ olduğunu gösteriniz. (Burada Q^+ pozitif rasyonel sayıların kümesini göstermektedir.)

9) $x \in Q$ ve $x \neq 0$ olsun. $x>1 \iff x^{-1}<1$ olduğunu gösteriniz.

10) $\frac{2}{7} < a < \frac{3}{8}$ koşuluna uygun en az üç a rasyonel sayısı bulunuz.

11) $B = \left\{1 + \frac{1}{n},\ n \in N^+\right\}$ rasyonel sayı kümesinin en küçük elemanı var mıdır? B nin her elemanından küçük olan en büyük rasyonel sayı hangisidir?

$C = \left\{1 - \frac{1}{n},\ n \in N^+\right\}$ rasyonel sayı kümesinin en büyük elemanı var mıdır? C nin her elemanından büyük olan en küçük rasyonel sayı hangisidir?

12) $\frac{a+b}{2} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, $(a, b \in N^+)$ olduğunu gösteriniz.

5–2. Reel (Gerçek) Sayılar

Buraya kadar, doğal sayılardan başlayarak ardarda genişletmelerle tamsayıları, sonra da rasyonel sayıları elde ettik. Doğal sayıları aralarında bire-bir eşleme kurulabilen kümelerin denklik sınıfları olarak tanımladık. Tamsayıları doğal sayı ikilileri, rasyonel sayıları da tam sayı ikilileri yardımıyla belirttik. Rasyonel sayıların sayı eksenini dolduramadığını örneğin, karesi 2'ye eşit bir sayının rasyonel olmadığı halde sayı ekseni üzerinde bir yeri olduğunu gösterdik. Ayrıca devirli ondalık açılımlarla rasyonel sayılar arasında bir bire-bir eşleme kurarak (her rasyonel sayının bir ondalık devirli kesir ve her ondalık devirli kesrin bir rasyonel sayı haline getirilebileceğini göstererek) devirli olmayan ondalık açılımların rasyonel sayı olamıyacaklarını göstermiş olduk. Sözgelimi, 0,1010010001... açılımı devirli olmadığı için bir rasyonel sayı değildi. Rasyonel olmayan bu sayılara **irrasyonel sayılar** diyeceğiz.

Rasyonel sayılarla irrasyonel sayıların oluşturduğu kümeye **Reel Sayılar kümesi** denir. Böylece rasyonel sayıları genişleterek içinde hala sıralama özeliği bulunan en geniş sisteme geçilir ve bu sistemin bir cisim olduğu gösterilebilir. Bu cisme reel sayılar cismi denir ve R ile gösterilir.

Fazla ayrıntıya girmeden bu cismi aksiyomları ile vereceğiz. Bu aksiyomların ilk yedisi rasyonel sayılardakinin aynıdır. Q dan daha geniş olan R cisminin bu özelikleri taşıdığını kabul ederek sonuncu aksiyomu açıklamaya çalışacağız.

5–8. Tanım

İçinde bir toplama, çarpma ve $<$ bağıntısı tanımlı bir R kümesi aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa R reel sayılar cismi denir.

A_1 : R kümesi toplama ve çarpma işlemlerine göre bir cisim oluşturur. (Cismin toplamaya göre birim elemanı 0, çarpmaya göre birim elemanı 1 ile gösterilir.)

A_2 : Her $x,y \in R$ için,

$x<y$, $x=y$, $x>y$

hallerinden biri ve yalnız biri doğrudur.

A_3 : $\leqslant$, R'de bir sıralama bağıntısıdır.

A_4 : $x<y \iff x+z<y+z$

A_5 : $0<z$ ise, $x<y \iff xz<yz$

A_6 : $x<y$, $u<v \Rightarrow x+u<y+v$

A_7 : $x,y \in R^+$ ve $0<y$ ise $nx>y$

koşulunu sağlayan bir $n \in N^+$ vardır. (Arşimet özeliği)

A_8 : R de uzunlukları sıfıra yaklaşan,

$$[a_n , b_n] = \{x \in R \mid a_n \leqslant x \leqslant b_n , n \in N^+\}$$

biçimindeki her iç içe aralıklar dizisinin bir ortak elemanı vardır.

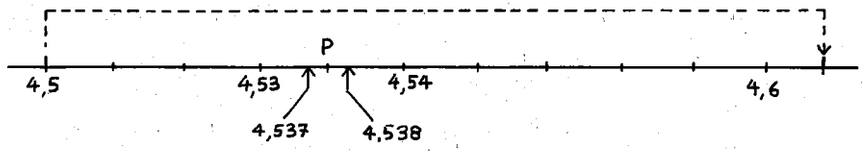
Sayı ekseni üzerinde ardışık tam sayılar arasındaki doğru parçalarını eşit uzunlukta 10'ar parçaya bölelim. Elde ettiğimiz yeni parçaları gene eşit uzunlukta 10'ar parçaya bölelim ve bu bölme işine böylece devam edelim. Elde edeceğimiz bütün aralıkların uç noktaları birer rasyonel sayıya karşılık gelecektir. Çünkü sözgelimi, 0 ile 1 tam sayıları arasını 10 eşit parçaya bölmekle her bölüm çizgisine, sıfırdan itibaren sırayla, 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; ... sayılarını karşı getirmiş oluruz. (Bu sayıların sırasıyla $0,1\overline{0}$; $0,2\overline{0}$; $0,3\overline{0}$; ... gibi devirli ondalık açılımlar olduğunu ve dolayısıyla rasyonel sayıları gösterdiğini hatırlayınız.) 0 ile 0,1 aralığını yeniden 10 eşit parçaya bölmekle bu sefer bölüm çizgilerine sırasıyla, 0,01 ; 0,02 ; ... 0,09 ; 0,10 sayılarını karşı getiririz. 0 ile 1 arasındaki doğru parçasını [0 , 1] biçiminde gösterelim. Buna sıfır–bir kapalı aralığı denir. 0 ile 1 bu aralığa aittir. Eğer bu uç noktalarını aralığa dahil etmek istemeseydik bunu (0,1) biçiminde yazacak

ve "sıfır, bir" açık aralığı diye okuyacaktık. [0 , 1] aralığının 0 ile 1 ve bunların arasındaki bütün noktaların kümesi olacağına dikkat ediniz. Buna göre, [0 , 0,1]⊂[0 , 1] olduğu açıktır. Aynı biçimde,

$$[0\ ;\ 1]\supset[0{,}1\ ;\ 0{,}9]\supset[0{,}2\ ;\ 0{,}8]\supset\ldots$$

dir.

Şimdi sayı ekseni üzerinde gelişigüzel bir P noktası alalım. Bu nokta, uzunlukları birer birim olan doğru parçalarından birine ait olacaktır. (Eğer P bir uç nokta ise bunun sağdaki doğru parçasına ait olduğunu kabul edelim.) P bir uç nokta değilse P nin içinde bulunduğu 1 birim uzunluğundaki doğru parçasını $\frac{1}{10}$ birim uzunlukta 10 parçaya bölelim. P yine bu 10 parçadan birine ait olacaktır. Böylece devam edersek P noktasının içinde bulunduğu ve uzunlukları her seferinde bir öncekinin $\frac{1}{10}$ u olan doğru parçaları elde ederiz, veya P bir uç nokta olur ve parçalamaya son veririz. Eğer P hiç bir adımda uç nokta olmuyorsa her biri bir öncekinin alt kümesi olarak bulunan doğru parçalarının uzunlukları gittikçe küçülüp sıfıra yaklaştığından sonunda bir tek ortak noktaları olacaktır. Doğru parçalarının uçları yukarıda belirttiğimiz gibi rasyonel noktalardır ve bu noktalar iki taraftan P ye yaklaşırlar. Çünkü parçaların uzunlukları sıfıra yaklaşmaktadır. (5–3. Şekil)i dikkatle inceleyiniz.



(5–3. Şekil)

$$[4{,}5\ ;\ 4{,}6]\supset[4{,}53\ ;\ 4{,}54]\supset[4{,}537\ ,\ 4{,}538]\supset\ldots$$

olduğuna dikkat ediniz. Şekilde P; 4,5 ile 4,6 arasında bir noktadır. Bu aralığı 10 eşit parçaya böldüğümüzde P; 4,53 ile 4,54 ün içine düşüyor. Tekrar bu aralığı 10'a böldüğümüzde P; 4,537 ile 4,538 aralığına düşüyor. Böylece devam edersek, P, uzunlukları gittikçe küçülüp sıfıra yaklaşan iç–içe aralıkların bir ortak noktası oluyor. Yani P yi,

$$[4{,}5\ ;\ 4{,}6]\supset[4{,}53\ ;\ 4{,}54]\supset[4{,}537\ ;\ 4{,}538]\supset\ldots$$

kapalı aralıklar zincirinin ortak noktası olarak belirtmekteyiz.

Genel olarak sayı ekseninin bir P noktasını P'yi içine alan ve uzunlukları gittikçe sıfıra yaklaşan,

$$[a_1;b_1]\supset[a_2;b_2]\supset\ldots$$

kapalı aralıklar zincirinin ortak noktası olarak belirtebiliriz. Şayet P bir aralığın uç noktası oluyorsa bundan sonraki aralıkları, [P ; P] sıfır uzunluklu aralıklar olarak düşünüp yazabiliriz. Böylece elde edilen aralık zincirine bir iç içe aralıklar sistemi ve reel sayıları bu şekilde tanımlamaya da Cantor (Kantor) (1845–1918) metodu denir.

Özel olarak $\sqrt{2}$ yi bir iç içe aralıklar sistemi ile belirtelim.

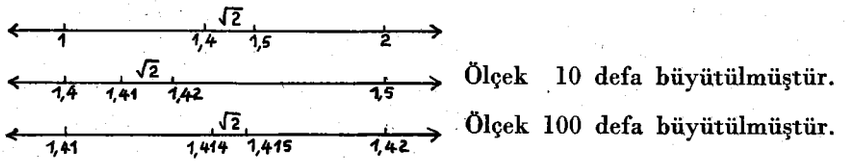
Daha önce,

$1^2=1$ ve $2^2=4$ olduğu için $1<\sqrt{2}<2$ ve gene $(1{,}4)^2=1{,}96<2$ ve $(1{,}5)^2=2{,}25>2$ olduğu için $1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$ tir. Böylece devam edersek,

$$1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$$
$$1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415$$
$$1{,}4142<\sqrt{2}<1{,}4143$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

olacaktır.

Bu durumları sayı ekseni üzerinde gösterelim. (5–4. Şekil)



(5–4. Şekil)

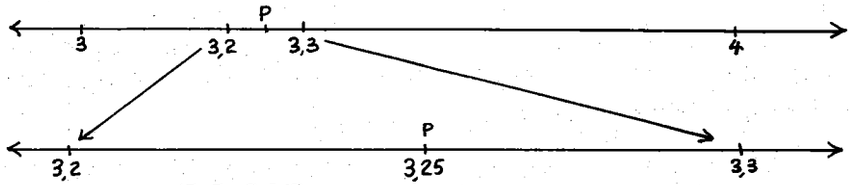
$[1\ ;\ 2]\supset[1{,}4\ ;\ 1{,}5]\supset[1{,}41\ ;\ 1{,}42]\supset[1{,}414\ ;\ 1{,}415]\supset\ldots$ aralıklar sistemi ile belirtilebilebilir.

Rasyonel sayılar cisminde kalsaydık ve aralıkların sadece rasyonel sayıları içine aldığını düşünseydik bu aralıkların bir ortak noktası olmayacaktı. ($\sqrt{2}$ rasyonel olmadığı için.)

Şimdi de başka bir örnek alalım. 3,25 sayısını bir içiçe aralıklar sistemi ile belirtmeğe çalışalım. Sayı ekseni üzerinde önce [3 , 4] aralığını 10 eşit parçaya bölelim. Sonra [3,2 ; 3,3] aralığını tekrar 10 eşit parçaya bölelim. 3,25 sayısı 3,2 noktasından itibaren 5 nci aralığın sağ uç noktası olacaktır. Öyleyse 3,25 sayısı,

$$[3\ ;\ 4]\supset[3{,}2\ ;\ 3{,}3]\supset[3{,}25\ ,\ 3{,}25]\supset[3{,}25\ .\ 3{,}25]\supset\ldots$$

iç içe aralıklar sistemi ile belirlenmektedir. Bu sistemin üçüncü adımdan itibaren sıfır uzunluktaki [3,25 , 3,25] aralıklarından ibaret olacağına dikkat ediniz.(5–5. Şekil)i inceleyiniz.



(5–5. Şekil) Ölçek 10 defa büyütülmüştür.

Her reel sayı, uç noktaları rasyonel olan bir iç içe aralıklar zincirinin ortak noktası olarak elde edilir. Buna göre her reel sayıya rasyonel sayılarla yaklaşılabilir.

Örneğin,

$$\sqrt{2}=1{,}4142135\ldots=1+\frac{4}{10}+\frac{1}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{2}{10000}+\cdots.$$

dır. $\sqrt{2}$ rasyonel sayı olmadığı halde rasyonel sayıların bir toplamı (sonsuz terimli) olarak belirlenebilir. Reel sayıların ekseni doldurması, $x^2=2$, $x^2=3$ gibi denklemlerin çözümüne olanak verir. R cisminde bu özeliğe **Tamlık** özeliği, denir. Reel sayılar cismine ilişkin A_6 aksiyomu **tamlık** özeliğini belirtir.

Tamlık Özeliği. R de uzunlukları sıfıra yaklaşan veya sıfır olabilen her $(a_n\in Q\ ,\ b_n\in Q)$,

$$[a_1\ ;\ b_1]\supset[a_2\ ,\ b_2]\supset[a_3\ ,\ b_3]\supset\ldots\supset[a^n\ ;\ b^n]\supset\ldots$$

iç içe aralıklar dizisinin bir ve yalnız bir ortak noktası vardır.

O halde reel sayıları devirli ve devirsiz ondalık açılımlar olarak tanımlamakla aslında iç–içe aralıklar sistemini kullandığımızı görüyorsunuz. İç-içe aralıklar sistemi G. Cantor'un ismiyle anılır.

Rasyonel sayılardan hareketle reel sayılara geçiş daha başka yollarla da yapılabilir, ama biz burada onları vermeyeceğiz. Sadece Dedekind

adlı bir matematikçinin rasyonel sayılardan meydana gelen ve bazı koşulları sağlayan küme ikilileri yardımıyla reel sayıları kurduğunu açıklamakla yetineceğiz. Rasyonel sayılardan reel sayılara geçmekle sayı eksenini doldurmuş oluyoruz.

5–4. Alıştırmalar

1) $0{,}\overline{6}$, $0{,}\overline{3}$, $0{,}\overline{4}$ devirli kesirlerini, bayağı kesir halinde yazınız ve bunları ikişer ikişer toplayınız.

2) $0{,}\overline{6}$ ve $0{,}\overline{3}$, $0{,}\overline{6}$ ve $0{,}\overline{4}$ devirli kesirlerini toplayarak, yeni devirli kesirler elde ediniz ve bunları bayağı kesire çevirip 1. alıştırmadaki sonuçlarımızla karşılaştırınız.

3) $0{,}\overline{3}$ ve $0{,}\overline{4}$ devirli kesirlerini alt alta yazarak bildiğiniz şekilde çarpmayı deneyiniz ve cevap olacak devirli kesrin 6 basamağını bulunuz.

4) 0,135 ve 0,1363 rasyonel sayıları arasında bir irrasyonel sayı bulunduğunu gösteriniz. (Yol : Bu sayılar arasında bir devirsiz kesir arayınız.)

5) Herhangi iki rasyonel sayı alarak, bunların arasında bir irrasyonel sayı bulunduğunu gösteriniz.

6) 3,246 sayısını iç içe aralıklar sistemi ile belirtiniz.

7) $\sqrt{3}$ sayısını bir iç içe aralıklar sistemi ile belirtiniz.

8) $\sqrt{2}=1+\frac{4}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{4}{10^3}+\frac{2}{10^4}+\cdots$

toplamında her terim rasyonel midir? Rasyonel sayılar kümesi toplamaya göre kapalı mıdır? Neden $\sqrt{2}\notin Q$ dur?

9) $x^2-2=0$ denklemi R de çözülebilir. Çözüm kümesini bulunuz.

10) $x^2+1=0$ denklemi R de çözülemez. Nedenini açıklayınız.

11) $x^2+1=0$ denklemini $Z/2$ cisminde ve $Z/5$ cisminde çözünüz.

5–3. Karekök ve Mutlak Değer

$(-2)^2=4$ ve $2^2=4$ olduğuna göre karesi 4 olan iki reel sayının varlığından söz edebiliriz. Aynı biçimde karesi $\frac{1}{9}$ olan yani $x^2=\frac{1}{9}$

şartını sağlayan iki reel sayı $\frac{1}{3}$ ve $-\frac{1}{3}$ tür. Ama karesi -1 veya $-\frac{1}{9}$ olan hiçbir reel sayı yoktur. Çünkü sıfırdan farklı bir reel sayının karesi pozitiftir.

Genel olarak karesi verilen bir pozitif a sayısına eşit bir tek pozitif p sayısı olduğu gösterilebilir. Yani $p^2=a$, $(a>0)$ şartını sağlayan bir tek $p>0$ sayısı vardır. Diğer taraftan $(-p)^2=a$ olacağından karesi a'ya eşit olan iki reel sayı vardır. (Bunlardan birinin pozitif, diğerinin negatif olduğuna dikkat ediniz.) 0'ın karekökü ise bir tanedir ve kendisidir.

5–9. Tanım

Karesi bir $a\in R^+$ sayısına eşit olan iki sayıdan pozitif olanına a'nın pozitif karekökü, negatif olanına da a'nın negatif karekökü denir. a'nın pozitif karekökü $\sqrt{a}$ ve negatif karekökü $-\sqrt{a}$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre,

$$(\sqrt{a})^2=(-\sqrt{a})^2=a \text{ dır.}$$

Örneğin, 4'ün karekökü iki tanedir. Bunlar,

$$-\sqrt{4}=-2 \text{ ve } \sqrt{4}=2 \text{ dir.}$$

Pozitif bir sayının iki karekökünün toplama işlemine göre birbirinin tersi olduğuna dikkat ediniz. 0'ın karekökünün 0 ve bunun toplamaya göre tersinin yine kendisi olduğunu da görünüz.

Yukarıdaki açıklamalara göre her $x\in R$ için $\sqrt{x^2}$ ile x her zaman aynı sayıyı gösteremezler. Burada $\sqrt{x^2}$ kabulümüze göre daima pozitif veya sıfırdır. Halbuki x negatif te olabilir. Örneğin, $\sqrt{(-5)^2}=5>0$ olduğu halde $-5<0$ dır. Yani $\sqrt{(-5)^2}=-5$ yazmak yanlıştır.

Tamsayılarda bir sayının mutlak değerinden ne anladığınızı açıklamıştık.

$x\geq 0$ ise $|x|=x$ ve $x<0$ ise $|x|=-x$ idi. Yani her $x\in Z$ için $|x|\geq 0$ oluyordu. Bunu kısaca,

$$|x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \text{ ise,} \\ -x, & x<0 \text{ ise.} \end{cases}$$

biçiminde de gösteririz. Tamsayılarda yaptığımız bu tanım reel sayılarda da aynıdır. Yani, $x\in R$, $x\geq 0$ ise $|x|=x$, $x<0$ ise $|x|=-x$ tir. O halde, $\sqrt{x^2}=|x|$ olduğunu söyleyebiliriz.

5–8. Örnek

$$|-1|=\sqrt{(-3)^2}=\sqrt{9}=3$$
$$|7|=\sqrt{7^2}=\sqrt{49}=7$$
$$|0|=\sqrt{0^2}=0 \quad \text{dır.}$$

5–9. Örnek

$|x-2|=3$ önermesi,
$x-2\geq 0$ ise $x-2=3$ ve,
$x-2<0$ ise $-(x-2)=3$ anlamındadır.

Bu önermeleri sağlayan x leri bulunuz.

Şimdi karekökle ilgili bazı teoremleri ifade edelim ve bunları ispatlayalım.

5–2. Teorem

$a\geq 0$, $b\geq 0$ reel sayıları için,

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \quad \text{dir.}$$

İspat :

$a\geq 0$ ve $b\geq 0$ olduğundan $x^2=a$ ve $y^2=b$ koşullarını sağlayan $x\geq 0$ ve $y\geq 0$ reel sayıları vardır. Yani $x=\sqrt{a}$ ve $y=\sqrt{b}$ dir. Diğer taraftan $x^2y^2=ab$ olduğundan $xy=\sqrt{ab}$ ve dolayısıyla $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ olur.

5–3. Teorem

$a\geq 0$, $b>0$ ise,

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{dir.}$$

Bu teoremin ispatı yukardakine benzer bir yolla yapılır. Bunu alıştırma olarak size bırakıyoruz.

5–10. Örnek

$$\sqrt{\frac{27}{20}}=\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{3^2.3}}{\sqrt{2^2.5}}=\frac{\sqrt{3^2.\ 3}}{\sqrt{2^2}.\sqrt{5}}=\frac{|3|\sqrt{3}}{|2|\sqrt{5}}=\frac{3.\sqrt{3}}{2.\sqrt{5}}$$

Şimdi $a>0$ için,

$$\sqrt{a}=\frac{a}{\sqrt{a}} \quad \text{ve} \quad \frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$$

olduğunu gösterebiliriz.

$$\sqrt{a}=\frac{\sqrt{a}}{1}=\frac{\sqrt{a}.\sqrt{a}}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a}}=\frac{a}{\sqrt{a}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}.\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}}=\frac{\sqrt{a}}{a}$$

Bu eşitlikler, bir kesrin payından veya paydasından $\sqrt{a}$ çarpanını kaldırmakta yarar sağlar.

5–11. Örnekler

a) $$\frac{15}{2\sqrt{3}}=\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{15}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{5.\sqrt{3}}{2}$$

b) $$\frac{3\sqrt{7}}{5}=\frac{3}{5}\sqrt{7}=\frac{3}{5}\cdot\frac{7}{\sqrt{7}}=\frac{21}{5\sqrt{7}}$$

5–12. Örnek

$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ olduğunu gerçekleyebiliriz. (Sağ tarafı, çarpmanın toplama ve çıkarma üzerine dağılma özeliğini kullanarak açar ve gerekli kısaltmaları yaparsak sol tarafı elde ederiz.) O halde,

$$(a+b\sqrt{c})(a-b\sqrt{c})=a^2-b^2c$$

dir. Bundan yararlanarak,

$$\frac{1}{a+b\sqrt{c}}=\frac{a-b\sqrt{c}}{a^2-b^2c}$$

yazabiliriz. (Sol tarafın pay ve paydasını $a+b\sqrt{c}$ nin **eşleniği** olan $a-b\sqrt{c}$ ile çarptığımıza dikkat ediniz.)

5–13. Örnek

$\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}$ ifadesinin paydasını kökten kurtaralım. Pay ve paydayı $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$ ile çarparsak,

$$\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{xh+}+\sqrt{x}}=h.\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{(x+h)-x}=\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$$

elde edilir.

5–5. Alıştırmalar

1) Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

a) $|4-7|-9$

b) $|-4-7|$

c) $|2-^1|$

2) Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

a) $\sqrt{x^4}$

b) $\sqrt{5^2\ \ (-7)^2}$

c) $\sqrt{(-7)^2.9^6.2{,}25}$

3) Karekök alma işleminin, pozitif reel sayılarda,

a) Toplama,

b) Çıkarma,

c) Çarpma,

d) Bölme

işlemleri üzerinde dağılma özeliği var mıdır?

4) $a>0$, $b>0$ ise,

$a>b \Rightarrow \sqrt{a}>\sqrt{b}$ olduğunu gösteriniz.

(Yal : $x^2=a$ ve $y^2=b$ koşullarına uygun pozitif x,y reel sayılarının varlığını düşünerek hipotezi kullanınız.)

5) Her $x\in R$ için,

$|x^2|=x^2$ ve $|x|=|-x|$ olduğunu ispatlayınız.

6) Her $x, y \in R$ ve $n \in N^+$ için,

$|xy|=|x|.|y|$ ve $|x^n|=|x|^n$ olduğunu ispatlayınız. (Yol : Her $x \in R$ için $|x|=\sqrt{x^2}$ olduğunu hatırlayınız.)

7) Her $x, y \in R$ ve $y \neq 0$ için,

$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ olduğunu ispatlayınız.

8) Her $x, y \in R$ için,

$|x+y| \leqslant |x|+|y|$ olduğunu gösteriniz.

9) Aşağıdaki açık önermelerin doğruluk kümelerini bulunuz. (Yol : $x \geqslant 0$ iken $|x|=x$ ve $x<0$ iken $|x|=-x$ olacağını düşününüz).

a) $|x-4|=1$
b) $|x|>2$
c) $|3x-4|>2$
d) $|x-1|>3$
e) $|3x+10| \leqslant 21$
f) $|5x+1|<0$

10) a bir rasyonel sayı ve b, içinde tam kare çarpanı bulunmayan bir doğal sayı olmak üzere aşağıdakileri $a\sqrt{b}$ biçiminde ifade ediniz.

a) $\sqrt{8}$
b) $\sqrt{75}$
c) $\sqrt{98}$
d) $\sqrt{\frac{3}{4}}$
e) $\sqrt{\frac{5}{9}}$
f) $\sqrt{\frac{4}{25}}$
g) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$
h) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$
i) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{12}$
j) $(\sqrt{2})^2$
k) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$
m) $\frac{\sqrt{5}}{27}$
n) $\frac{3}{\sqrt{5}}$
o) $\sqrt{2}+3 \cdot \sqrt{2}$
p) $3\sqrt{2}-\sqrt{8}$

11) a ve b rasyonel sayılar ve c, içinde tam kare çarpanı olmayan bir doğal sayı olmak üzere aşağıdakileri $a\sqrt{b}$ biçiminde ifade ediniz.

a) $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$
b) $(1+\sqrt{2})^2$
c) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-\sqrt{24}$
d) $(1+\sqrt{2})(2-\sqrt{12})$
e) $(1+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})$
f) $\frac{1+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$
g) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$
h) $\frac{4}{\sqrt{3}-1}$
i) $\frac{4-2\sqrt{3}}{5+\sqrt{192}}$
j) $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$
k) $\frac{4}{3+\sqrt{5}}$
l) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$
m) $\frac{13}{2\sqrt{3}+5}$
n) $\frac{89}{7\sqrt{2}-3}$
o) $\frac{7}{4\sqrt{2}-5}$
p) $\frac{16}{2\sqrt{11}+6}$

12) a, b, c tamsayılar olmak üzere aşağıdakilerin her birini $a+b\sqrt{c}$ biçiminde ifade ediniz.

a) $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$
b) $\frac{1}{3+2.\sqrt{2}}$
c) $\frac{1}{7+4.\sqrt{3}}$
d) $\frac{1}{9+4.\sqrt{5}}$
e) $\frac{1}{8+3.\sqrt{7}}$
f) $\frac{5}{2\sqrt{3}-7}$
g) $\frac{1}{3-4\sqrt{5}}$
h) $\frac{1}{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}$
i) $\frac{1}{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}$

13) aşağıdakilerin her birinin paydasını rasyonel yapınız.

a) $\frac{1}{3+\sqrt{5}}$
b) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$
c) $\frac{1}{2\sqrt{5}+3}$
d) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{7}}$
e) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$
f) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-2}$

5–4. Reel Sayıların Rasyonel Kuvveti

Doğal sayılar bölümünde doğal sayıların pozitif tam sayı kuvvetlerini tanımlamıştık. Burada da reel sayıların rasyonel kuvvetlerini ve bunlarla ilgili özeliklerini inceleyeceğiz.

$\sqrt{0} = 0$ olduğunu, negatif sayıların karekökleri olmadığını ve pozitif sayıların biri negatif biri pozitif olmak üzere iki karekökü olduğunu gördünüz.

Her hangi bir reel sayının varsa kareköküne o sayının 1/2 inci kuvveti de denir. O halde,

$a \geqslant 0$ için,

$$\sqrt{a} = a^{1/2}$$

Aynı biçimde bir $a \geqslant 0$ reel sayısı ve $n \in N^+$ için,

$$x^n = a$$

koşulunu sağlayan ve negatif olmayan bir tek reel x sayısı olduğunu gösterilebilir. Negatif olmayan bu sayı, $\sqrt[n]{a}$ veya $a^{1/n}$ (n nci kuvvetten kök a) biçiminde yazılır. Bu tanıma göre,

$$(\sqrt[n]{a})^n = (a^{1/n})^n = a$$

olur. Özel olarak $\sqrt[3]{a}$ ya a'nın küpkökü diyeceğiz.

n tek ise, $a<0$ da olsa,

$x^n = a$ koşulunu sağlayan bir tek x reel sayısı vardır. Söz gelimi, $\sqrt[3]{-8} = -2$ dir. Diğer taraftan $a<0$ ve n çift ise, $x^n = a$ koşulunu sağlayan hiçbir $x \in R$ sayısı olamaz.

Bundan böyle $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ yazdığımızda bunun belli bir reel sayı gösterdiğini kabul edeceğiz.

$a \geqslant 0$ için, $\sqrt[n]{a^p} = a^{p/n}$ biçiminde gösterileceğine dikkat ediniz. Sözgelimi,

$$\sqrt[4]{5^3} = 5^{3/4} \ , \ \sqrt[3]{4^2} = 4^{2/3}$$

olarak gösterilebilir.

5–14. Örnek

$\sqrt[3]{-64} = -4$, $\sqrt[4]{81} = 3$ tür.

$\sqrt[4]{-8}$ anlamsız olur.

$x \in R$ ve $n \in N^+$ için x^n ifadesi daha önceki gibi x'in kendi kendisiyle n defa çarpımı olarak tanımlanır. Özel olarak, $a^1 = a$ ve $a \neq 0$ için $a^0 = 1$ kabul edilir. 0^0 ise belirsizdir. (Yani 0^0 sembolü bir sayıyı göstermez.)

$a \neq 0$ olmak üzere $a^{-1} = \frac{1}{a}$ sayısının çarpma işlemine göre a'nın tersini belirttiğini yani,

$$a^{-1}.a = a.a^{-1} = 1$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre, her $a \neq 0$ reel sayısı ve $n \in N^+$ için,

$$a^{-n} = (a^{-1})^n$$

olarak tanımlanır.

5–15. Örnek

$$3^{-5} = (3^{-1})^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{3^5} \text{ tir.}$$

5–10. Tanım

$a \neq 0$ olmak üzere,

$$a^{r/s} = (a^{1/s})^r$$

dir.

($\sqrt[s]{a} = a^{1/s}$ yazdığımızda, $a<0$ olduğu zaman $s \in N^+$ sayısının tek sayı olması gerektiğini unutmayınız.)

5–4. Teorem

$p, q \in Q$ ve $a, b \in R$ olmak üzere,

$(a>0, b>0)$

i) $\left(\frac{1}{a}\right)^p = \frac{1}{a^p} = a^{-p}$

ii) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$,

iii) $a^p . a^q = a^{p+q}$

iv) $(a^p)^q = a^{p.q}$

v) $(ab)^p = a^p b^p$

Bu teoremin ispatı kolay olmakla beraber uzundur. Bu ispatı burada vermiyeceğiz.

5–16. Örnekler

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{5^3} = 5^{-3}$

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{81}{625}$

c) $(3)^{2/7}.(3)^{3/7} = 3^{2/7+3/7} = 3^{5/7}$

d) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^6$

e) $(ab)^{1/3} = a^{1/3}.b^{1/3} = \sqrt[3]{a}\,.\,\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$

f) $\sqrt[3]{a^2}\,.\,\sqrt{a^3} = a^{2/3}.a^{3/2} = a^{2/3+3/2} = a^{13/6}$

g) $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{a^{2/3}} = a^{-2/3}$

5–6. Alıştırmalar

1) Aşağıdaki ifadeleri 3'ün kuvvetleri biçiminde yazınız.

a) $\sqrt[3]{9}\,.\sqrt[7]{3}$

b) $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[7]{3}}$

c) $\frac{2\sqrt{2}}{(36)^{3/4}}$

d) $\frac{1}{(27)^{-2/3}}$

e) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2/5}$

2) Aşağıdaki ifadeleri 6'nın kuvvetleri biçiminde yazınız.

a) $(2^3)^{-1/2}\,.\,(3^{1/2})^{-3}$

b) $\frac{8(12^4)^{1/5}}{(2^{-1/5})^{-4}}$

c) $(-6)^3\,(36)^{1/6}$

d) $7^{3/5}.7^{-3/5}$

3) Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) $(x^{-1/3}.y^{1/2})^{-3}$

b) $(2x^{-1}.y^{1/2})^{-5/2}$

c) $(9x^{-3}.y^{-2})^{-5/2}$

d) $\left(\frac{27x^3}{16y^{-3}}\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{5^{\circ}x^2}{12y^{-2}}\right)^3$

e) $[\sqrt{a^{-4/5}.b^2}\,]^{-1/2}$

f) $\sqrt{xy^{-2}}\,.a^{-1}.\sqrt[6]{xy^4.a^2}$

g) $\sqrt{x^{-13}\sqrt{y^2}} : \sqrt[3]{y.\sqrt{x^{-3}}}$

h) $\left(\frac{2^0}{a^3}\,.\,\sqrt[3]{a^2}\right) : \left(\sqrt[3]{a^{-2}}\right)$

4) $2^{-1/2} = 4^{2x+5}$ açık önermesinin doğruluk kümesini bulunuz.

5) $3^{7+2x} = 9^{1-5x}$ açık önermesinin doğruluk kümesini bulunuz.

5–5. Oran ve Orantı

$(a,b) \neq (0,0)$, $(c,d) \neq (0,0)$ koşulunu sağlayan a, b, c, d$\in$R sayıları arasında a.d=b.c bağıntısı varsa [a : b] ikilisi ile [c : d] ikilisi **orantılıdır** diyelim.

[a : b] ikilisini de **a'nın b'ye oranı** diye okuyalım. [a : b] ikilisini rasyonel sayı ile karıştırmamak koşulu ile $\frac{a}{b}$ biçiminde yazabiliriz.

Ancak $\frac{a}{b}$ yi "a bölü b" diye değil, "a'nın b ye oranı" diye okuyacağız.

Söz gelimi, $\frac{3}{0}$ sembolüne 3'ün 0'a oranı diyeceğiz. Buna göre $\frac{a}{b}$ nin bir oran olması için a ve b'den en az birinin sıfırdan farklı olması gerektiğine dikkat ediniz.

Reel sayı ikilileri arasında tanımlanan orantılı olma bağıntısının özeliklerini araştırınız. Yansıma, simetri ve geçişme özelikleri bulunduğunu göreceksiniz. O halde bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır.

Bundan böyle [a : b]=[c : d] gibi orantılı iki ikiliyi,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

biçiminde yazacağız ve buna a, b, c, d sayıları arasında bir orantı, a ve d'ye bu orantının dışları, b ve c'ye bu orantının içleri diyeceğiz. ([a : b]=[c : d] ifadesinde a ve d'nin dışta, b ve c nin içte olduğuna dikkat ediniz.)

Sözgelimi,

[5 : 7=[1 : 1,4] orantısını,

$$\frac{5}{7}=\frac{1}{1,4};$$

[4 : 0]=[7 : 0] orantısını da

$$\frac{4}{0}=\frac{7}{0}$$

biçimlerinde yazabiliriz.

Aşağıdaki teoremleri, ispatını orantının tanımını kullanarak ve çarpmanın özeliklerinden yararlanarak kolayca yapabilirsiniz.

5–5. Teorem

a, b, c, d, k, m, n∈R ise,

i) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ (Dışlar yer değiştirebilir.)

ii) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (İçler yer değiştirebilir.)

iii) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

iv) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{ka+lc}{kb+ld}$

v) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ka+lb}{ma+nb}=\frac{kc+ld}{mc+nd}$

5–17. Örnek

a) $\frac{7}{8}=\frac{3,5}{4} \Rightarrow \frac{4}{8}=\frac{3,5}{7}$

b) $\frac{0,4}{3}=\frac{2}{15} \Leftrightarrow \frac{0,4}{2}=\frac{3}{15}$

c) $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ iken k=2 ve l=–3 olsun.

$$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{2.3+(-3)6}{2.5+(-3)10}=\frac{-12}{-20}$$

d) $\frac{2}{6}=\frac{0,4}{1,2}$ iken,

k=–2, l=2, m=3, n=5 ise,

$$\frac{-2(2)+2.6}{3.2+5.6}=\frac{-2.0,4+2.1,2}{3.0,4+5.1,2} \Rightarrow \frac{8}{36}=\frac{1,6}{7,2}$$ dir.

üçlü bir orantıyı, yani,

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ orantısını, a : c : e=b : d : f biçiminde yazabiliriz.

Bu üçlü orantı için,

k,l,m∈R olmak üzere,

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{k.a+l.c+m.e}{k.b+l.d+m.f}$$

eşitliğini 5–5. Teoremi yardımı ile gösterebilirsiniz.

5–10. Tanım

a, b, c, x∈R sayıları arasında $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$ bağıntısı varsa x sayısına ilk üç sayının döndüncü orantılısı denir.

Bu tanıma göre, 4, 9, 5 sayılarının dördüncü orantılısı,

$$\frac{4}{9}=\frac{5}{x} \text{ den } x=\frac{45}{4}=11,25$$

olur.

5–11. Tanım

$\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$ koşulunu sağlayan, varsa pozitif x sayısına a ve b reel sayılarının orta orantılısı veya geometrik ortası denir.

Bu tanıma göre $x^2=a.b$ yani $x=\sqrt{ab}$ dir.

Örneğin, 3 ile 12'nin geometrik ortası $x^2=3.12 \Rightarrow x=6$ dır.

5–7. Alıştırmalar

1) Aşağıdaki bağıntıları orantı olarak yazınız.

a) $3.6=2.9$

b) $x.z=y.v$

c) $4ab=5c$

2) Aşağıdaki orantılarda bilinmeyeni hesaplayınız.

a) $\frac{x}{6}=\frac{7}{3}$

b) $\frac{3}{x}=\frac{4}{5}$

c) $\frac{0}{4}=\frac{x}{5}$

d) $\frac{0,2}{6}=\frac{x}{7,1}$

e) $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}}=\frac{4}{x}$

3) Aşağıdaki sayıların yazılış sırasına göre dördüncü orantılısını bulunuz.

a) 4, 5, 10

b) 3, 7, 14

c) –13, 5, –4

d) 2, 3, 4

e) 7, 8, 9

4) Aşağıdaki orantılarda bilinmeyenleri bulunuz.

a) $2:3:7=x:y:4$

b) $a:b:4=4:5:7$

c) $4:5:7:8=x:y:z:24$

5) Aşağıdaki sayı çiftleri ile orta orantılı olan sayıyı bulunuz.

a) 4,9

b) 3,48

c) 2,25

d) 3,5

e) –6, –54

f) a^5,a

6) 520 lirayı 1, 2, 3, 4 ile orantılı olarak dört kişiye paylaştırınız.

7) 2200 cevizi beş çocuk arasında 2, 3, 4, 5, 8 sayıları ile orantılı olarak paylaştırınız.

8) $\frac{a}{c}=\frac{c}{d}$ olduğuna göre aşağıdaki orantıların doğru olduğunu gerçekleyiniz.

a) $\frac{a}{b}=\frac{2a+3c}{2b+3d}$

b) $\frac{c}{5a-2c}=\frac{d}{5b-2d}$

c) $\frac{a+3b}{a}=\frac{c+3d}{c}$

d) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ orantısından,

$$\frac{5a-2c+3e}{5b-2d+3f}=\frac{a+4c-2e}{b+4d-2f}$$

orantısını elde ediniz.

BEŞİNCİ BÖLÜMLE İLGİLİ TESTLER

1) $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$ işleminin sonucu aşağıdakilerden hangisidir.

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{2}{7}$ d) $\frac{7}{2}$ e) $\frac{3}{7}$

2) $3^{-\frac{2}{3}}$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\sqrt[3]{3^2}$ b) $\frac{1}{\sqrt{3^3}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}$ d) $\sqrt{3^{-3}}$ e) $\sqrt{3^3}$

3) $|5x-1| \leqslant 4$ önermesinin doğruluk kümesi hangisidir? ($x \in R$)

a) $\left\{x \mid -\frac{3}{5} \leqslant x \leqslant 1 \; ; \; x \in R\right\}$ b) $\left\{x \mid -\frac{3}{5} < x \leqslant 1 \; ; \; x \in R\right\}$

c) $\{x \mid -3 \leqslant x < 1 \; ; \; x \in R\}$ d) $\left\{x \mid -\frac{3}{5} \leqslant x \leqslant 1 \; ; \; x \in R\right\}$

e) $\left\{x \mid -\frac{3}{5} \leqslant x \; ; \; x \geqslant 1 \; ; \; x \in R\right\}$

4) $\forall a, b \in R$ için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) $\sqrt{a} = a^{1/2}$ c) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

b) $\sqrt{a^2} = a$ d) $\sqrt{a^4} = a^2$

e) $\sqrt[n]{a^p} = a^{p/n}$ $(n \in N^+)$

5) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

a) $\sqrt{3}-1$ b) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ d) $\sqrt{3}+1$ e) $\sqrt{3+1}$

6) $(1+\sqrt{3})^2$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) $4+\sqrt{6}$ b) $10+\sqrt{6}$ c) $10+2\sqrt{3}$

d) $4+2\sqrt{3}$ e) $10\sqrt{6}$

7) $3\sqrt{3} + \frac{4}{\sqrt{3}-1} - \frac{10}{\sqrt{3}+1}$ işleminin sonucu şunlardan hangisidir?

a) -3 b) $10\sqrt{3}$ c) $\frac{5\sqrt{3}-1}{2}$ d) $5\sqrt{3}$ e) 7

8) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) $2^{-\frac{7}{8}}$ b) $2^{\frac{3}{4}}$ c) $2^{\frac{3}{8}}$ d) $2^{\frac{7}{8}}$ e) $2^{\frac{3}{4}}$

9) $(\sqrt{2}-1)\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ çarpımının sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

a) $3\sqrt{2}$ b) $\sqrt{5}$ c) 1 d) $\sqrt{9-4\sqrt{2}}$ e) $\sqrt{3+\sqrt{2}}$

10) $x, y \in R$ iken aşağıdaki verilen eşitliklerden hangisi **yanlıştır?**

a) $|x| \cdot |y| = |x \cdot y|$

b) $|x^n| = |x|^n$

c) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$

d) $x \cdot y = |x \cdot y|$

e) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

ALTINCI BÖLÜM

GEOMETRİK KAVRAMLAR

Bu bölümde geometrik kavramları göreceksiniz. Buraya kadar mantığı, kümeleri, sonlu sistemleri ve sayıları incelediniz. Geometrik kavramları incelerken bütün bu bilgilerden yararlanacağız. Daha önceki matematik derslerinizde bir takım geometri bilgileri de öğrendiniz. Sözgelimi, "farklı iki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer", "Bir dik üçgenin hipotenüsünün uzunluğunun karesi, dikkenarlarının uzunlukları kareleri toplamına eşittir.", "Farklı iki doğru kesişirse ara kesit bir tek noktadır.", "Bir açının kenarları paralel doğrularla kesilirse, kenarlar üzerinde karşılıklı orantılı parçalar ayrılır." gibi önermeleri duymuşsunuzdur. Bunlardan bazıları çok açık bazıları ise açık değildir.

Bu bölümde, geometri bilgilerinizi, karışık olanları daha basit olanlardan elde edebilecek ve her önermeyi daha önce gelen önermelerden mantıklı düşünme yolu ile bulabilecek biçimde sıralayacağız.

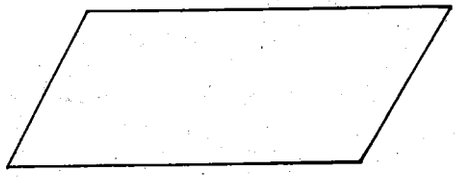
Bu kitabın birinci bölümünde Mantık konusunda öğrendiğiniz gibi bir şeyi tanımlayabilmek için daha önce tanımlanmış terimlerden yararlanırız. Onları da tanımlayabilmek için yine onlardan önce tanımlanmış terimlerden yararlanmamız gerekecektir. Bu böyle sürüp gideceğinden bazı terimleri tanımsız kabul etmek zorundayız. Bu terimler, Nokta, Doğru ve Düzlem olacaktır. Ancak bu terimlerden ne anladığımızı açıklayalım.

Nokta dediğimiz zaman sivri uçlu bir kalemin kâğıt üzerinde bıraktığı izi düşünebiliriz.

Doğru dediğimiz zaman (6–1. Şekil)deki gibi, iki taraftan sonsuz uzanan bir nokta kümesi hatırımıza gelecektir.

(6–1. Şekil)

Düzlem deyince tamamiyle düz ve her yönde sonsuz uzanan bir yüzey düşününüz. Düzlemi de (6–2. Şekil) deki gibi göstereceğiz.



(6–2. Şekil)

Bu kitabın birinci bölümünde aksiyom ve teoremin ne olduğunu öğrendiniz. Doğru olduğu ispatsız kabul edilen önermelere "aksiyom", varsayımı ve doğruluk değeri 1 olan $p \Rightarrow q$ gerektirmesine de "teorem" denildiğini hatırlayınız.

Kuşkusuz aksiyomlar gelişigüzel seçilmezler. Aksiyomlarımızı kuracağımız geometrinin özeliklerine göre seçeriz. Matematik konuları hakkında sağlam ve düzenli bir bilgiyi, aksiyomlarımızı saptadıktan sonra verebiliriz.

Bu bölümde geniş ölçüde kümelerden ve reel sayılardan yararlandığımızı göreceksiniz.

6–1. Doğru, Doğru Parçası, Işın

A ve B gibi farklı iki nokta seçildiği zaman bunlardan geçen doğruyu çizmek için cetvel kullanacağınızı biliyorsunuz. Kullanacağınız cetvelin düzgün olmasını isterseniz.

Düzgün bir cetvel ile A ve B gibi farklı iki noktadan geçen doğruyu çiziniz. Kaç tane çizebiliyorsunuz? Bu gerçeği geometrinin birinci aksiyomu olarak kabul edeceğiz.

6–1. Aksiyom

Farklı iki noktadan geçen bir ve yalnız bir doğru vardır.

Aşağıda verdiğimiz teoremin ispatında bu aksiyomdan yararlanacağız.

6–1. Teorem

Hipotez : l ile d farklı iki doğrudur.
Hüküm : l ile d en çok bir noktada kesişir.

İspat : l ile d doğrularının farklı iki A ve B noktalarında kesiştiklerini varsayalım. Bu durum, 6–1. aksiyoma aykırıdır. Neden? Şu halde, $l \cap d$ kümesinde farklı iki nokta olamaz. $l \cap d = \emptyset$ veya bu iki doğrunun ancak bir tek kesim noktası vardır.

Bir sayının mutlak değerinden ne anladığımızı önceki bölümde açıklamış ve $x \in R$ için $x \geqslant 0$ ise, $|x| = x$ ve $x < 0$ ise $|x| = -x$ olduğunu tanım olarak vermiştik. Sözgelimi.

$$|0| = 0,\ |3| = 3,\ |-5| = 5,\ \left|-\frac{3}{2}\right| = -\left(-\frac{3}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

dir.

Doğrunun bir noktalar kümesi olduğunu biliyorsunuz. Reel sayılar sistemini de incelemiştik. Her reel sayıya doğru üzerinde bir tek noktanın eşlendiğini, karşıt olarak, doğru üzerindeki her noktanın da bir tek reel sayıya eşlendiğini söyleyebilirsiniz. Bu durumu bir aksiyom olarak vereceğiz.

6–2. Aksiyom (Cetvel Aksiyomu)

Bir doğrunun noktaları ile reel sayılar arasında aşağıdaki üç şartı sağlıyan bire–bir bir eşleme yapılabilir.

1 – Doğrunun her noktasına bir ve yalnız bir reel sayı eşlenir.

2 – Her reel sayıya bir ve yalnız bir nokta eşlenir.

3 – Doğru üzerindeki iki nokta arasındaki uzaklık bu noktalarla eşlenen reel sayıların farkının mutlak değeridir.

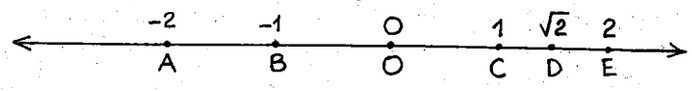
Bu aksiyomda sözü edilen A, B noktaları arasındaki uzaklığı |AB| biçiminde göstereceğiz.

Reel sayıları bir doğru üzerine yerleştirdiğimizi düşünürsek 6–2. Aksiyom bir cetveli oluşturmaktadır.

6–1. Tanım

6–2. Aksiyom ile belirtilen bu cetvele doğru üzerinde koordinat sistemi, bu doğru üzerinde bir noktaya eşlenen reel sayıya da o noktanın koordinatı denir.

6–1. Örnek



(6–3. Şekil)

(6–3. Şekil) de

A nın koordinatı, —2 dir. Bunu A(—2) şeklinde gösterebiliriz.

B nin koordinatı, —1 veya B (—1)

D nin koordinatı, $\sqrt{2}$ veya D $(\sqrt{2})$

AB uzaklığı, $|AB| = |-2-(-1)| = |-1| = 1$

AC uzaklığı, $|AC| = |-2-1| = |-3| = 3$

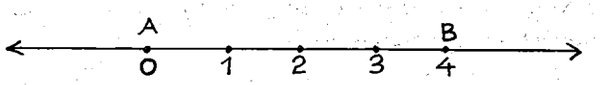
BD uzaklığı, $|BD| = |-1-\sqrt{2}| = 1+\sqrt{2}$ dir.

Koordinat sistemlerinde birim ve yön seçmekte tamamen serbestiz. Birimi nasıl seçersek seçelim yapacağımız ispatlar daima doğru olacaktır. Ancak bir birimde anlaşmamız faydalı olur. Bundan sonra koordinat sisteminde nokta işaretlemelerinde aynı birimi seçtiğimizi kabulleneceğiz. Bunu şu aksiyomla pekiştirelim.

6–3. Aksiyom

Bir doğru üzerinde A ve B gibi farklı iki nokta verildiğinde A nın koordinatı sıfır, B nin koordinatı pozitif bir reel sayı olacak biçimde bir ve yalnız bir koordinat sistemi seçilebilir.

6–2. Örnek



(6–4. Şekil)

(6–4. Şekil) de A nın koordinatı 0, B nin koordinatı 4 olacak biçimde seçilen bir ve yalnız bir koordinat sistemi görüyorsunuz.

6–1. Alıştırmalar

1. Aşağıdaki sayıların mutlak değerlerini bulunuz.

a) -3 b) $-\sqrt{7}$ c) $-6{,}2$ d) 9

e) $\sqrt{13}$ f) 0 g) $-\frac{1}{2}$ h) π

2. Aşağıdaki ifadelerin hangileri daima doğrudur? (Harfler reel sayılardır.)

a) $|2-7|=7-2$ b) $|a|=a$

c) $|a^2|=a^2$ d) $|3-a|=a-3$

e) $|a|+|4|=|a+4|$ f) $|-\pi|=\pi$

g) $|a-4|=|4-a|$ h) $|a-b|=|b-a|$

3. Bir sayı ekseni çizerek üzerinde, aşağıda koordinatları verilen noktaları gösteriniz.

a) -3 b) $-\sqrt{2}$ c) 0 d) $\sqrt{2}$

e) 2 f) $5\frac{1}{2}$ g) $-3\frac{1}{2}$ h) $\sqrt{5}$

4. Aşağıda koordinatları verilen noktalar arasındaki uzaklıkları bulunuz.

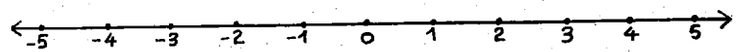
a) 3 ve 5 b) -2 ve 7

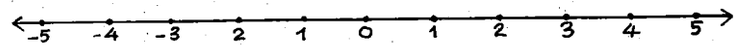
c) 0 ve 3 d) 0 ve -3

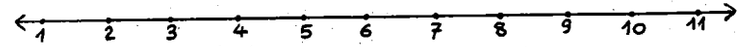
e) a ve b f) $\frac{2}{5}$ ve $\frac{7}{8}$

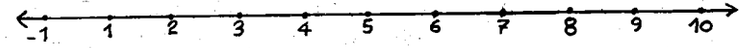
g) $\sqrt{3}$ ve 2 h) $\sqrt{5}$ ve $-\sqrt{5}$

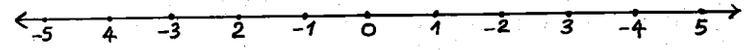
5. Aşağıdakilerden hangisi koordinat sistemidir? (6–2. aksiyomu sağlayan sistemin koordinat sistemi olduğunu hatırlayınız.)

a) 

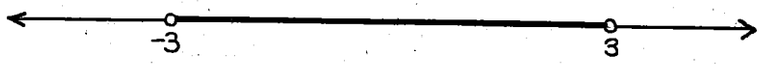
b) 

c) 

d) 

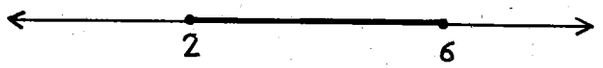
e) 

6.a) $x\in R, |x|<3$ ifadesi, -3 ten büyük ve 3 ten küçük reel sayıların kümesini gösterir. Yani bu ifadeyi sağlayan noktaların kümesi $\{x|-3<x<+3, x\in R\}$ dir. Bunu reel sayılar ekseni üzerinde (6–5. Şekil) deki gibi gösteririz. (Burada uç noktalar kümeye ait olmadığı için açık çizilmiştir.)



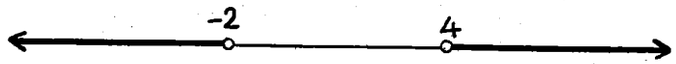
(6–5. Şekil)

b) $|x-4|\leqslant 2$ ifadesi de kendisinden 4 eksiği, -2 den büyük veya eşit, 2 den küçük veya eşit olan sayılar kümesini gösterir. Yani bu ifadeyi sağlayan küme, $\{x|-2\leqslant x-4\leqslant 2\}$ dir. Buradan $-2\leqslant x-4\leqslant 2 \Rightarrow 2\leqslant x\leqslant 6$ bulunur. Bu kümeyi reel sayılar ekseninde (6–6. Şekil) deki gibi gösteririz.



(6–6. Şekil)

c) $|x-1|>3$ önermesinin doğruluk kümesi ise $\{x|x-1>3$ veya $x-1<-3\}$tür. Buradan, $x-1>3 \Rightarrow x>4$ veya $x-1<-3 \Rightarrow x<-2$ önermeleri elde edilir. Bu küme de (6–7. Şekil) deki gibi gösterilir.



(6–7. Şekil)

Siz de aşağıdaki önermelerin doğruluk kümelerini reel sayılar ekseni üzerinde gösteriniz.

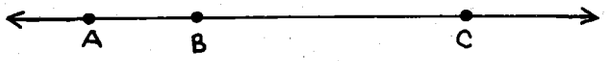
a) $|x|\leqslant 4$ b) $|x|<2$ c) $|x|=4$

d) $|x|>5$ e) $|x|>0$ f) $|x|\geqslant 0$

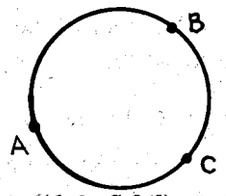
g) $|x-3|<2$ h) $|x+7|<10$ ı) $|x-1|\geqslant 5$

6–2. Arada Olma

Bir sırada üç öğrencinin oturduğunu varsayalım. Bunlardan kaç tanesi diğer ikisi arasındadır, diyebilirsiniz? Cevabınız, "yalnız bir öğrenci diğer ikisi arasındadır" olacaktır.



(6–8. Şekil)



(6–9. Şekil)

(6–8. Şekil) deki l doğrusu üzerinde alınan A, B, C noktalarını görüyorsunuz. Bunlardan hangi nokta diğer ikisi arasındadır? B noktasının A ile C noktaları arasında olduğunu kolaylıkla söyleyebilirsiniz. Oysa (6–9 Şekil) deki çember üzerinde alınmış olan A, B, C noktalarından herhangi birinin diğer ikisi arasında olduğunu söylemek imkansızdır. Çünkü bu durumda arada olmadan ne anladığımızı açıkca ortaya koyamayız. Bir doğru üzerinde alınan üç noktadan birinin, diğer ikisi arasında olma şartını aşağıdaki tanım bize vermektedir.

6–2. Tanım

Eğer A, B, C bir doğrunun farklı üç noktaları ve $|AB|+|BC|=|AC|$ ise, B noktası A ile C arasındadır.

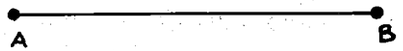
Bir doğrunun, noktalardan oluşan küme olduğunu hatırlayınız. Bir doğru üzerinde A ve B noktalarını aldığımızda doğruya ait A ile B arasında kaç nokta vardır.? A ile B arasında olmayan kaç nokta vardır. (6–10. Şekil).

(6–10. Şekil)

6–3. Tanım

Bir doğrunun A, B noktaları ile bunların arasında bulunan bütün noktalardan oluşan kümeye AB doğru parçası denir ve [AB] sembolü ile gösterilir (6–11. Şekil).

A, B noktalarına doğru parçasının uç noktaları denir.

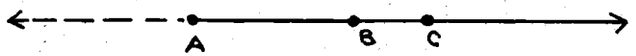


(6–11. Şekil)

Defterinizde farklı iki nokta alarak bunların belirttiği doğru parçasını çiziniz.

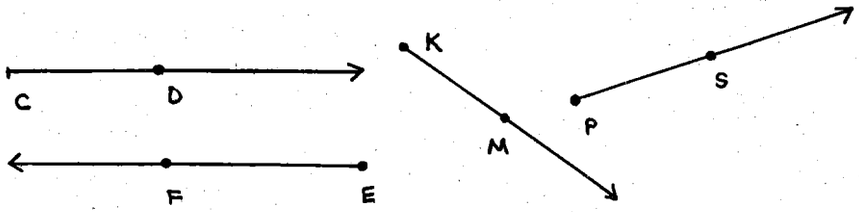
6–4. Tanım

A, B noktaları bir l doğrusunun noktaları ise, [AB] doğru parçası ve B noktası A ile C arasında olacak biçimde alınan C noktalarının kümesine AB ışını denir ve [AB biçiminde gösterilir (6–12. Şekil).



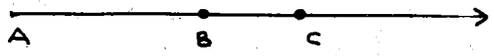
(6–12. Şekil)

Bu tanıma göre, $[AB=[AB]\cup\{C||AB|+|BC|=|AC|\}$ olur. A noktasına ışının başlangıç noktası denir.



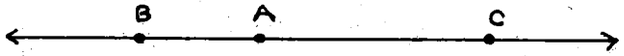
(6–13. Şekil)

(6–13. Şekil) de gördüğünüz ışınlar, [CD, [EF, [KM, [PS biçiminde yazılır.



(6–14. Şekil)

(6–14. Şekle) bakarak $[AB=[AC$ ve $[AB\neq[BC$ olduğunu görünüz.



(6–15. Şekil)

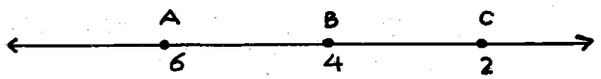
(6–15. Şekil) de, [AB ve [AC ışınlarını ayrı ayrı düşününüz. $[AB\cap[AC=\{A\}$ dır, değil mi? Böyle, iki ışına zıt ışınlar diyeceğiz.

Şimdi arada olma ile ilgili olarak verilen aşağıdaki teoremleri ispatlayalım.

$|AC|=|x-0|=|x|$ ve $x>0$ olduğu için $|x|=x$ dir. O halde $|AC|=x$ olur.

3–2. aksiyom gereğince AB doğrusunun ancak bir noktasının koordinatı x olacağından yalnız bir tek C noktası vardır.

(6–17. Şekil) de B noktasının, A ile C arasında olduğunu görüyorsunuz. |AB| ile |BC| yi hesaplayınız. Bu durumda, B noktasına [AC]nin orta noktası diyeceğiz.



(6–17. Şekil)

6–5. Tanım

B noktası A ile C arasında ve $|AB|=|BC|$ ise B noktasına [AC] doğru parçasının orta noktası denir.

6–5. Teorem

Her doğru parçasının bir ve yalnız bir orta noktası vardır.

İspat : [AC] doğru parçası üzerinde $|AB|=|BC|$ olacak biçimde bir B noktası bulacağız ve bunun yalnız bir tane olacağını göstereceğiz. B noktası A ile C arasında olacağı için $|AB|+|BC|=|AC|$ ve orta nokta tanımından da $|AB|=|BC|$ olmalıdır. Burdan $2.|AB|=|AC|$ bulunur. Yani, $|AB|=\frac{1}{2}.|AC|$ dir. [AC ışını üzerinde koordinatı $\frac{1}{2}.|AC|$ olan B noktası, 6–4. Teorem gereğince yalnız bir tanedir ve B noktası A ile C nin arasında olduğu için B noktası [AC] doğru parçası üzerindedir.

6–5. Örnek

(a) Uç noktaları A(2), B(10) olan [AB] doğru parçasının orta noktası C(6) noktasıdır.

(b) Uç noktaları P(—1), Q(11) olan [PQ] doğru parçasının orta noktası R(5) noktasıdır.

6–2. Alıştırmalar

1. [AB] ile [AB arasındaki farkı belirtiniz.

2. Bir l doğrusu ve üzerinde bir A noktası alınız. r bir pozitif sayı olduğuna göre A dan r kadar uzaklıkta ve l doğrusu üzerinde kaç nokta vardır?

3. Aşağıda koordinatları ile verilen üç noktadan hangisinin diğer ikisi arasında olduğunu söyleyiniz.

a) A(—1), B(3), C(2)

b) M(10), N(2), O(—4)

c) $P\left(\frac{1}{2}\right)$, $O\left(\frac{1}{3}\right)$, $R\left(\frac{1}{4}\right)$

d) $D(\sqrt{2})$, $E(\sqrt{3})$, F(1)

4. Aşağıda uç noktaları verilen doğru parçalarının orta noktalarının koordinatlarını bulunuz.

a) A(—2), B(2)

b) P(4) O(7)

c) $M(\sqrt{2})$ $N(\sqrt{5}$

d) $E\left(\frac{1}{2}\right)$, $F\left(-\frac{1}{8}\right)$

6–3. Doğrular, Düzlemler

Tanımlanmamış terimlerimizin nokta, doğru, düzlem olduğunu hatırlayınız. Doğru ve düzlem, elemanları sayılamayacak kadar çok olan nokta kümeleridir. Ancak onlar uzayın birer öz alt kümeleridir. Bunun için önce uzayın tanımını vereceğiz, daha sonra da, nokta, doğru ve düzlem arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz.

6–6. Tanım

Bütün noktaların kümesine uzay denir.

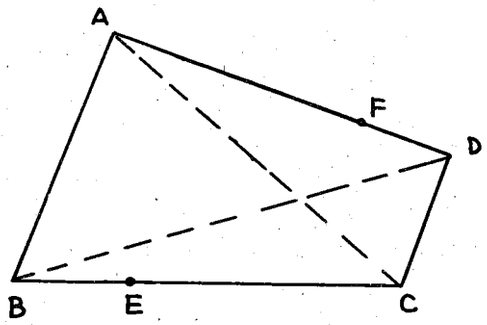
Bu bölümle ilgili olarak vereceğimiz teoremlere geçmeden önce bazı tanım ve aksiyomlar vereceğiz. Bunları dikkatle okuyunuz.

6–7. Tanım

a) Bir nokta kümesinin bütün noktalarını içine alan bir doğru varsa, bu kümenin noktaları doğrusaldır denir.

b) Bir nokta kümesinin bütün noktalarını içine alan bir düzlem varsa bu kümenin noktaları düzlemseldir denir.

6–6. Örnek



(6–18. Şekil)

(6–18. Şekil) de

B , E , C noktaları doğrusaldır.

A , B , C noktaları doğrusal değildir.

B , E , C , D noktaları düzlemseldir.

A , B , E , D noktaları düzlemsel değildir.

Defterinizi, kaleminizin sivri ucu üzerinde tutmaya çalışınız. Kolay oluyor mu? Kalem sayısını önce ikiye, sonra da üçe çıkarınız. Ne görüyorsunuz?

Aşağıda vereceğimiz aksiyomlar düzlem ve uzay için istenilen özeliği verir.

6–4. Aksiyom

1) Herhangi üç noktadan en az bir düzlem geçer.
2) Doğrusal olmayan üç noktadan bir ve yalnız bir düzlem geçer.
3) Her düzlemin doğrusal olmayan en az üç noktası, uzayın düzlemsel olmayan en az dört noktası vardır.

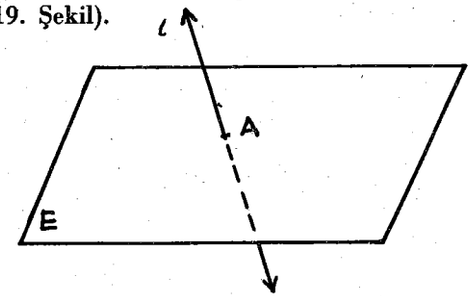
6–5. Aksiyom

Eğer farklı iki nokta bir düzlemin elemanı ise, bu iki noktayı içine alan doğru, o düzlemin içinde kalır.

6–5. Aksiyom bir düzlemin düz olduğunu, her yönde sonsuza uzandığını ifade eder. Bir doğru parçası veya bir ışın bir düzlemin içinde ise bu doğru parçası veya bu ışının belirttiği doğru da o düzlemin içindedir.

6–6. Teorem

Bir doğru, içinde bulunmadığı düzlemi keserse ara kesit bir tek noktadır. (6–19. Şekil).



(6–19. Şekil)

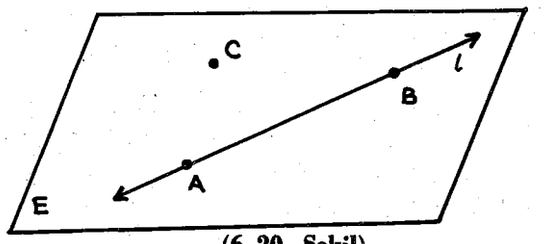
İspat : l doğrusunun E düzlemini kestiği veriliyor. Ara kesit kümesinde A ve B gibi en az iki nokta olduğunu varsayalım. O zaman, l doğrusu 6–5. aksiyom gereğince E düzlemi içinde olmalıdır. Oysa, l doğrusunun E düzlemi içinde olmadığı biliniyor. Şu halde, arakesit bir tek noktadan oluşmaktadır.

6–4. Aksiyom doğrusal olmayan üç noktadan bir ve yalnız bir düzlemin geçtiğini belirtmektedir. Halbuki bir düzlemi belirtmek için her zaman üç noktadan söz etmeyiz. Bununla ilgili olarak aşağıdaki teoremleri veriyoruz.

6–7. Teorem

Bir doğru ile dışındaki bir noktadan, bir ve yalnız bir düzlem geçer (6–20. Şekil).

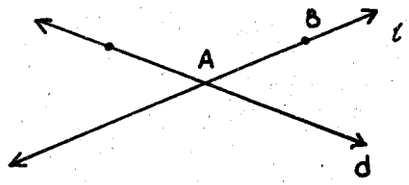
İspat : Verilen doğru l, dışındaki nokta C olsun. l nin en az iki noktası vardır. Bunlar A, B olsun. A, B, C doğrusal olmayan farklı üç nokta olduğundan 6–4. Aksiyom gereğince A, B, C noktalarımdan bir ve yalnız bir düzlem geçer. O halde bir doğru ile dışındaki bir noktadan da bir ve yalnız bir E düzlemi geçer. Neden?



(6–20. Şekil)

6–8. Teorem

Kesişen iki doğrudan bir ve yalnız bir düzlem geçer (6–21. Şekil).



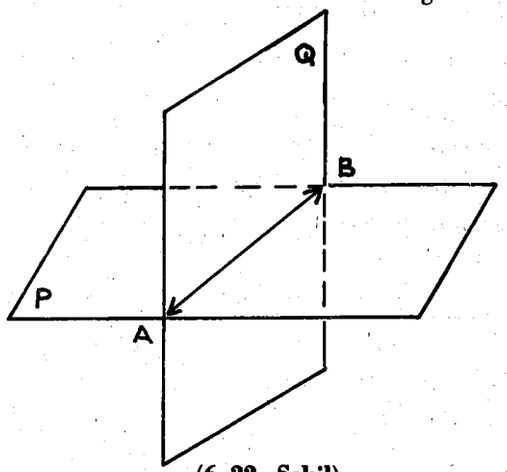
(6–21. Şekil)

İspat : Verilen iki doğru l ile d olsun ve bunlar A noktasında kesişsinler. l doğrusu üzerinde A dan farklı bir B noktası, d doğrusu üzerinde de A dan farklı bir C noktası alalım. Birbirinden farklı ve doğrusal olmayan, A, B, C noktaları elde ettik. O halde, "Keşişen ve birbirinden farklı iki doğrudan bir ve yalnız bir düzlem geçer" diyebiliriz. Neden?

Farklı iki düzlem düşünelim. Bu düzlemleri P ve Q ile gösterirsek $P \cap Q = \emptyset$ veya $P \cap Q \neq \emptyset$ olabilir. İki düzlemin kesişimi ile ilgili şu aksiyomu verelim.

6–6. Aksiyom

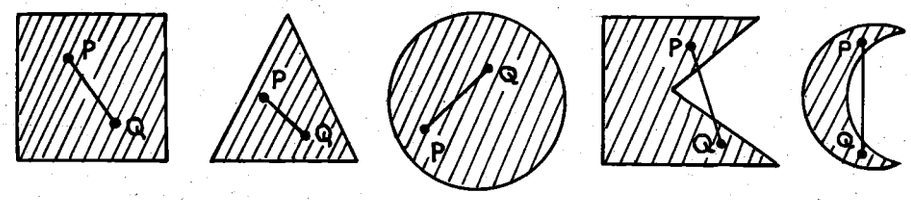
Kesişen farklı iki düzlemin arakesiti bir doğrudur.



(6–22. Şekil)

(6–22. Şekil) de, $P \cap Q = AB$ olduğunu görüyorsunuz.

6–4. Konveks Kümeler



(6–23. Şekil)

(6–23. Şekil) deki kümelerin herbirinin iç bölgesinde herhangi P, Q noktaları alıp bunları birleştirelim. İlk üç kümede [PQ] nun bu kümelerin alt kümesi olduğunu yani bu kümelerin [PQ] yu içine aldığını, diğer iki kümede ise [PQ] üzerinde bu kümelere ait olmayan en az bir nokta bulunduğunu söyleyebilirsiniz. Siz de, çeşitli nokta kümeleri alınız ve bunlar içinde alınan her iki noktayı birleştiren doğru parçasının bu kümelerin içinde kalıp kalmayacaklarını saptayınız.

6–8. Tanım

Bir A nokta kümesinin her P, Q nokta çifti için [PQ] doğru parçası A kümesinin içinde kalırsa, A kümesine konveks küme denir.

Bu tanım gereğince A kümesi konveks ise,

$$\forall P, Q \in A \text{ için } [PQ] \subset A$$

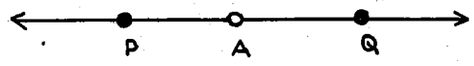
dır.

6–7. Örnek

a) Doğru konveks bir kümedir.

b) Düzlem konveks bir kümedir.

c) Bir doğrunun bir noktasını çıkarsak geriye kalan noktalar kümesi konveks değildir. Neden? (6–24. Şekil).



(6–24. Şekil)

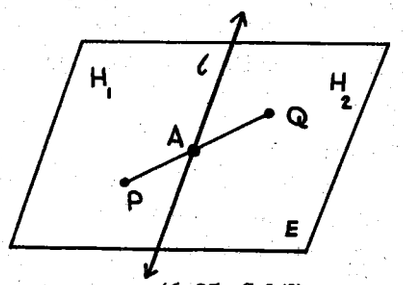
Düzlemin ve uzayın konveks birer nokta kümesi olduğunu düşünebilirsiniz. Düzlemi bir doğru ile, uzayı da bir düzlemle ikiye ayırsak elde edilen nokta kümelerinin de konveks olduğunu sezginizle anlayabilirsiniz. Bu gerçekleri aksiyom olarak verelim.

6–7. Aksiyom (Düzlem Ayırma Aksiyomu)

Bir düzlem ve onun içinde bir doğru verilse, düzlemin bu doğrunun iki yanında kalan noktaları aşağıdaki koşullara uygun iki küme oluşturur.

1. Kümelerin her bir konvekstir.

2. Eğer P bu kümelerden biri içinde, Q diğeri içinde ise [PQ] doğru parçası bu doğruyu keser.



(6–25. Şekil)

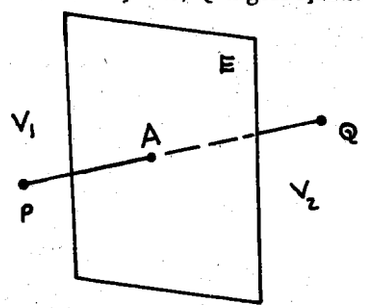
(6–25. Şekil) de görüldüğü gibi E düzlemi l ile H_1 ve H_2 gibi iki kısma ayrılmıştır. $P \in H_1$, $Q \in H_2$ ve $[PQ] \cap l = \{A\}$ dır. Burada H_1, H_2 kümelerine yarı düzlemler, L doğrusuna ayırma doğrusu adını vereceğiz. l ayırma doğrusu bu yarı düzlemlerin hiçbirine ait olmayacaktır. 6–7. aksiyom bize aynı yarı düzlemde sözgelimi H_1 de alınan iki noktayı birleştiren doğru parçasının l yi kesmeyeceğini de vermektedir.

6–8. Aksiyom

Bir düzlemin iki yanında kalan uzayın noktaları aşağıdaki koşullara uygun iki küme oluşturur (6–26. Şekil).

1. Bu kümelerden her biri konvekstir.

2. P bu kümelerden biri içinde, Q diğeri içinde ise [PQ] doğru parçası düzlemi keser.



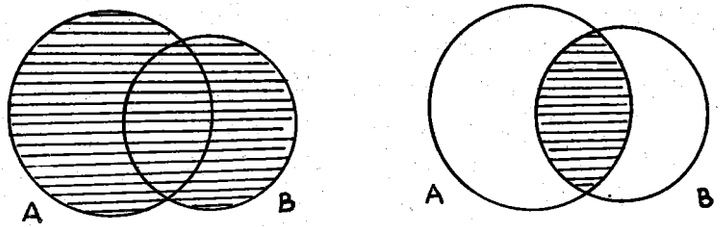
(6 26. Şekil)

E düzlemi uzayı V_1, V_2 gibi iki kısma ayırıyor. $P \in V_1$, $Q \in V_2$ ise $[PQ] \cap E = \{A\}$ dır. V_1 ve V_2 ye yarı uzaylar, E düzlemine de bu yarı uzayların yüzü denir. E yüzü V_1 ve V_2 yarı uzaylarının hiçbirine ait olmayacaktır. P, Q noktalarının ikisi de aynı yarı uzayda, örneğin V_1 de ise [PQ] doğru parçası E düzlemini kesmiyecektir.

6–3. Alıştırmalar

1. Işın konveks bir küme midir?
2. Doğru parçası konveks bir küme midir?
3. Bir tek noktadan oluşan bir küme konveks midir?
4. Boş küme konveks midir?
5. Küre yüzeyi konveks midir?
6. Kürenin içi konveks midir?
7. a) Bir nokta uzayı ayırabilir mi?
   b) Bir doğru uzayı ayırabilir mi?
   c) Bir düzlem uzayı ayırabilir mi?
   d) Bir nokta içinde bulunduğu düzlemi ayırabilir mi?
   e) Bir nokta içinde bulunduğu doğruyu ayırabilir mi?
8. (6–27. Şekil) deki çember ve içlerinden oluşan A ve B kümelerinin,
   a) Birleşimi
   b) Kesişimi

konveks midir?



(6–27. Şekil)

9. Konveks iki kümenin birleşimi konveks olabilir mi? Cevabınıza uygun bir örnek veriniz.

10. Konveks olmayan iki kümenin birleşimi konveks olabilir mi? Örnek veriniz.

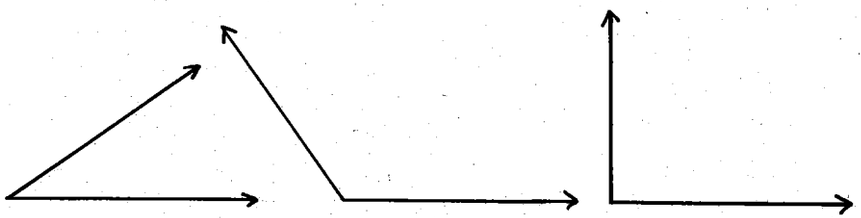
11. Bir doğru üzerine alınan farklı iki nokta doğruyu kaç kısma ayırır. Bu kısımların her biri konveks midir?

12. Bir düzlemde, bir noktada kesişen iki doğru düzlemi kaç bölgeye ayırır?

13. Kesişen iki düzlem uzayı kaç bölgeye ayırır?

14. Farklı üç düzlem uzayı en az ve en çok kaç bölgeye ayırır?

6–5. Açılar, Üçgenler

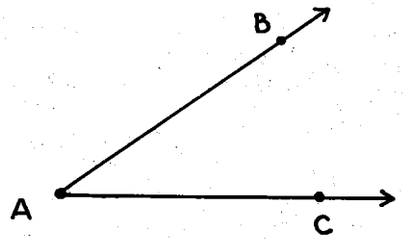


(6–28. Şekil)

(6–28. Şekil) ler birer açı göstermektedir. Görülüyor ki, açı iki ışından oluşmaktadır. Açının tanımını aşağıdaki biçimde vereceğiz.

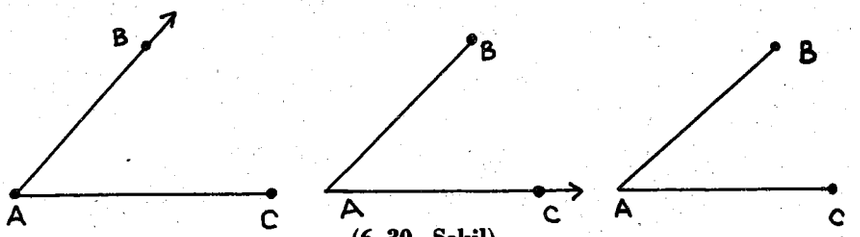
6–9. Tanım

Aynı doğru üzerinde olmayan uç noktaları ortak iki ışının birleşimine açı, bu ışınlara açının kenarları, ortak noktalarına da açının köşesi denir (6–29. Şekil).



(6–29. Şekil)

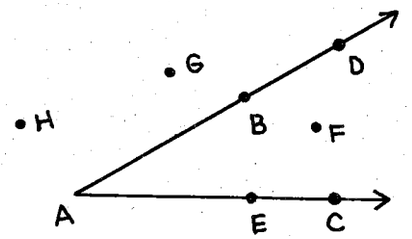
[AB ve [AC ışınlarının birleşimi olan açıyı $\widehat{BAC}$ ya da $\widehat{CAB}$ biçimlerinde göstereceğiz. Bazen bir açıyı yalnız köşe adıyla da söyleriz. Örneğin, yukardaki açıyı, $\hat{A}$ açısı diye de yazabiliriz. Ancak bu durumda hangi açıyı söylediğimiz kesinlikle belli olmalıdır.



(6–30. Şekil)

(6–30. Şekil) dekiler bir açı değildir. Ancak bir açıyı belirtebilirler. [AB] ve [AC] doğru parçaları [AB ve [AC ışını olarak alınırlarsa her üç şekilde de $\widehat{BAC}$ elde edilir.

Açı bir nokta kümesidir. Bir açının bulunduğu düzlemde bazı noktalar açıya ait bazı noktalar ise açıya ait değildir. Örneğin (6–31. Şekil) de A, B, C, D, E noktaları $\widehat{BAC}$ açısına aittir. F, G, H noktaları ise açının elemanı değildir.



(6–31. Şekil)

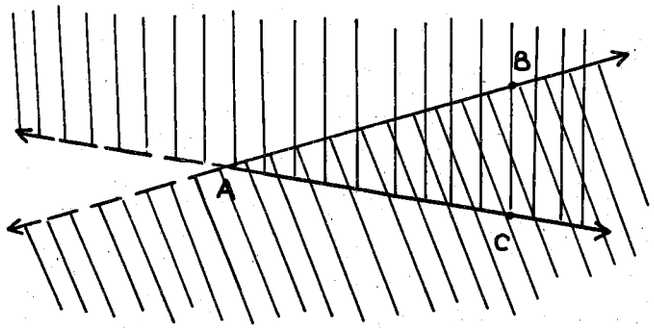
Açının, düzlemi iki bölgeye ayırdığına da dikkat ederek aşağıdaki tanımı verelim.

6–10. Tanım

Bir E düzleminde bulunan $\widehat{BAC}$ açısının iç bölgesi, şu iki yarı düzlemin arakesit kümesidir (6–32. Şekil).

1– AC kenar doğrusuna göre B nin bulunduğu yarı düzlem.

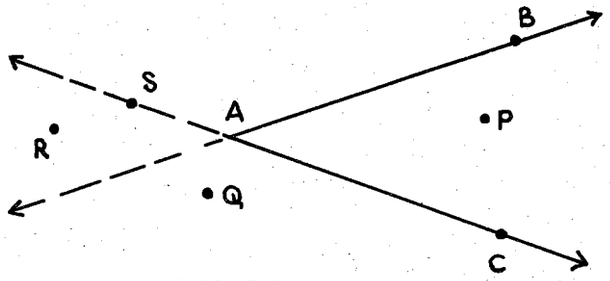
2– AB kenar doğrusuna göre C nin bulunduğu yarı düzlem.



(6–32. Şekil)

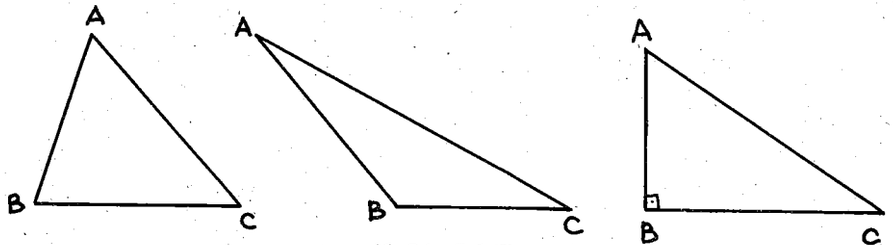
Bir nokta açının üzerinde veya içinde değilse açının dışındadır.

6–7. Örnek



(6–33. Şekil)

(6–33. Şekil) de P noktası $\widehat{BAC}$ açısının içinde; Q, R, S noktaları ise açının dışındadır.

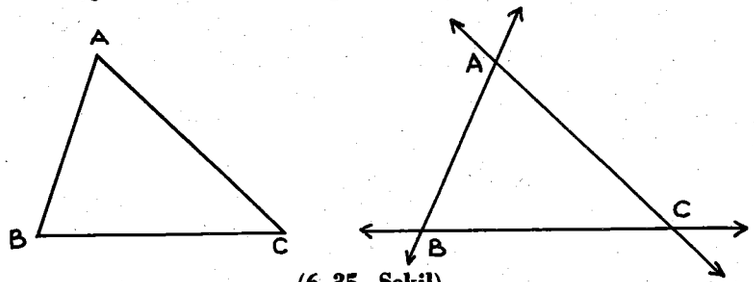


(6–34. Şekil)

(6–34. Şekil) ler birer üçgeni göstermektedir. Bu şekillerde [AB], [BC], [CA] doğru parçaları vardır ve bunlar birer nokta kümeleridir. O halde bir nokta kümesi olarak üçgenin tanımını verelim.

6–11. Tanım

A, B, C aynı doğru üzerinde olmayan üç nokta olsun, [AB], [BC], [AC] doğru parçalarının birleşimine üçgen, [AB], [BC], [AC] doğru parçalarına üçgenin kenarları, A, B, C noktalarına da üçgenin köşeleri denir ve üçgen $\widehat{ABC}$ biçiminde gösterilir (6–35. Şekil).



(6–35. Şekil)

Bir $\widehat{ABC}$ üçgeni üç açıyı belirtir fakat açıları tamamen içine almaz. $\widehat{ABC}$ üçgeninin açıları, $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$ veya $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ biçiminde gösterilir.

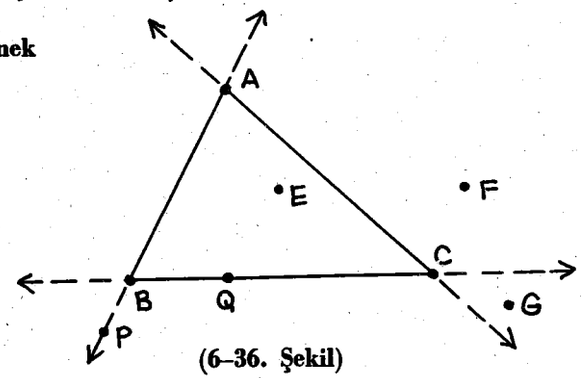
Bir üçgenin bulunduğu düzleme ait noktaların bazıları üçgene ait bazıları ise üçgene ait değildir. Noktaların durumunu belirtmek için aşağıdaki tanımı verelim.

6–12. Tanım

Bir nokta, üçgenin bütün açılarının içinde ise bu nokta üçgenin içindedir, denir. Üçgenin içindeki noktaların kümesine de üçgenin içi denir.

Üçgenin düzlemsel olduğuna dikkat ediniz. Üçgen düzleminde, üçgene veya içine ait olmayan noktaların kümesine üçgenin dışı denir.

6–8. Örnek



(6–36. Şekil)

(6–36. Şekil) de E noktası üçgenin içinde, F, G, P noktaları ise üçgenin dışındadır, Q, A noktaları ise üçgenin içinde ya da dışında değildir, üçgenin üzerindedir.

6–4. Alıştırmalar

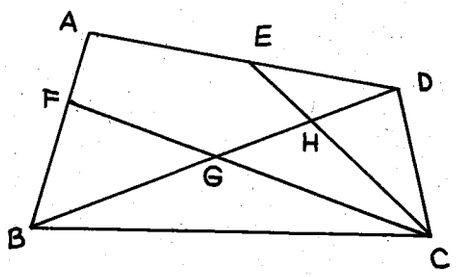
1– Bir açı çiziniz. Açının içinde bir A noktası ve açının dışında bir B noktası işaretleyiniz.

a) [AB] doğru parçası açının iki kenarını da keser mi?
b) [AB] doğru parçası açının en az bir kenarını keser mi?
c) [AB] doğru parçası açının köşesinden geçebilir mi?
d) Açının köşesi açının içinde midir? dışında mıdır?
e) Açının içi konveks bir küme midir?
f) Açının dışı konveks bir küme midir?

2– Bir $\widehat{ABC}$ üçgeni çiziniz. Üçgenin içinde bir P noktası dışında bir Q noktası işaretleyiniz.

a) [PQ] doğru parçası üçgenin kaç kenarını keser?
b) [PQ] doğru parçası üçgenin bir köşesinden geçiyorsa üçgenin kaç kenarını kesmiş olur?
c) Üçgenin içi konveks bir küme midir?
d) Üçgenin dışı konveks bir küme midir?
e) Üçgen konveks bir küme midir?

3–



(6–37. Şekil)

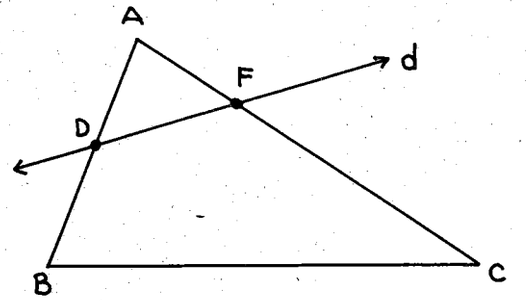
(6–37. Şekil) deki tüm açı ve üçgenleri yazınız.

4– Bir nokta bir üçgenin iki açısının içinde ise üçgenin de içindedir. Neden? (Böyle bir noktanın üçüncü açının da içinde olacağını gösteriniz.)

5– Üçgenin dışında alınan bir nokta, üçgenin açılarından,

a) Birinin içinde olabilir mi?
b) İkisinin içinde olabilir mi?
c) Üçünün içinde olabilir mi?

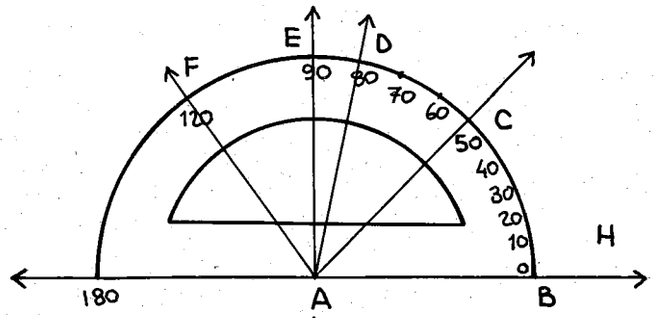
6–



(6–38. Şekil)

Eğer bir d doğrusu, $\widehat{ABC}$ üçgeninin kenarlarından ikisini köşelerden farklı D ve F noktalarında kesiyorsa, üçüncü kenarı kesmez. Kanıtlayınız. (Şekil 6–38).

6–6. Açıların Ölçülmesi



(6–39. Şekil)

Açıların iletki adı verilen bir araç ile derece olarak ölçüldüğünü biliyorsunuz. (6–39. Şekil) deki iletki ile köşesi A noktasında, bir kenarı da H yarı düzleminin kenar doğrusu üzerine getirilen açıların ölçülerini bulmak mümkündür. Bir açının kenarları arasında kalan derece sayısına o açının ölçüsü diyeceğiz.

Bir ölçme sonunda $\widehat{BAC}$ açısı için r sayısı bulunuyorsa, $\widehat{BAC}$ açısının ölçüsü r olacaktır. Bunu $m\,\widehat{BAC}=r$ biçiminde yazacak ve "ölçü $\widehat{BAC}=r$" biçiminde okuyacağız.

6–9. Aksiyom (Açı Ölçme Aksiyomu)

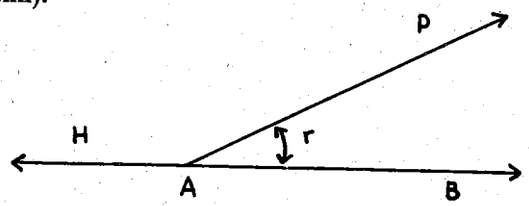
Her $\widehat{BAC}$ açısına sıfır ile 180 arasında bir reel sayı karşı gelir.

6–13. Tanım

6–9. Aksiyom ile bir $\widehat{BAC}$ açısına karşı gelen sayıya bu açının ölçüsü denir ve $m\,\widehat{BAC}=r$ biçiminde yazılır.

6–10. Aksiyom (Açı Çizme Aksiyomu)

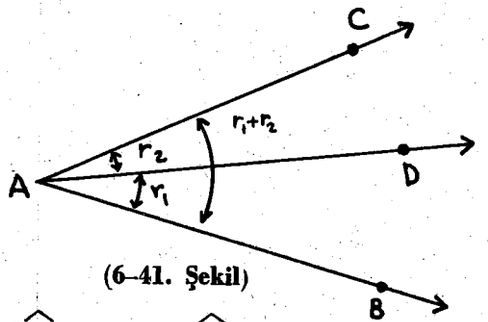
[AB, H yarı düzleminin kenar doğrusu üzerinde bulunan bir ışın olsun. P noktası, H yarı düzleminde olmak üzere her $r(0<r<180)$ sayısına karşılık $m\,\widehat{PAB}=r$ olacak biçimde bir ve yalnız bir [AP ışını vardır. (6–40. Şekil).



(6–40. Şekil)

6–11. Aksiyom (Açıların Ölçülerini Toplama Aksiyomu)

D noktası $\widehat{BAC}$ açısının içinde ise $m\,\widehat{BAD}+m\,\widehat{DAC}=m\,\widehat{BAC}$ dir. (6–41. Şekil).

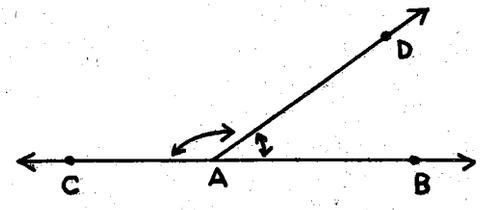


(6–41. Şekil)

$m\,\widehat{BAD}=r_1$ ve $m\,\widehat{DAC}=r_2$ ise $m\,\widehat{BAC}=r_1+r_2$ dir.

6–14. Tanım

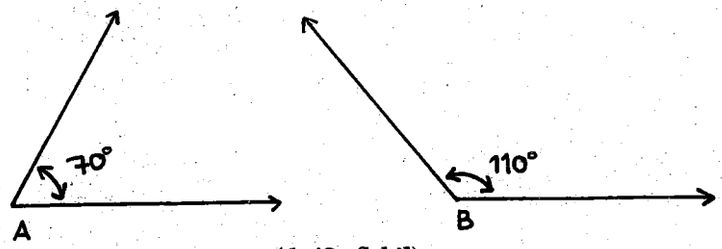
[AB ve [AC aynı doğruya ait zıt yönde ışınlar ve [AD başka bir ışın ise $\widehat{BAD}$ ile $\widehat{DAC}$ açıları doğrusal çift oluşturuyorlar, denir. (6–42. Şekil).



(6–42. Şekil)

6–15. Tanım

Ölçüleri toplamı 180 olan iki açıya bütünler açılar ve bunların her birine de diğerinin bütünleyeni denir.

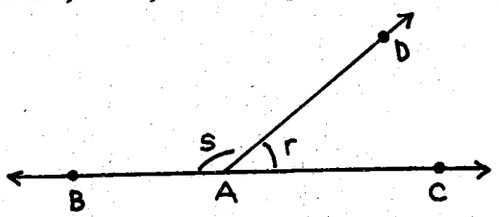


(6–43. Şekil)

(6–43. Şekil) de $m\widehat{A}=70$, $m\widehat{B}=110$ ise $m\widehat{A}+m\widehat{B}=180$ olduğundan $\widehat{A}$ ile $\widehat{B}$ açıları birbirinin bütünleyenidirler.

6–12. Aksiyom (Bütünleme Aksiyomu)

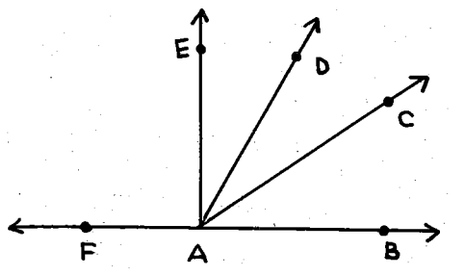
Bir doğrusal çift oluşturan iki açı birbirini bütünler.



(6–44. Şekil)

(6–44. Şekil) de B, A, C noktaları doğrusaldır. O halde $\widehat{CAD}$ açısı ile $\widehat{DAB}$ açısı birbirini bütünlemektedir.

6–10. Örnek



(6–45. Şekil)

(6–45. Şekil) de $\widehat{BAC}$ açısı ile $\widehat{CAF}$ açısı, $\widehat{BAD}$ açısı ile $\widehat{DAF}$ açısı, $\widehat{BAE}$ açısı ile $\widehat{EAF}$ açısı birbirlerini bütünler.

6–11. Örnek

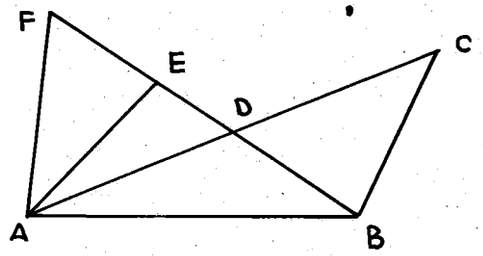
Bir açının ölçüsü onu bütünleyen açının ölçüsünün 5 katıdır. Bu iki açının ölçülerini bulunuz.

Çözüm : Açının ölçüsü x ise bütünleyenin ölçüsü 5x olacaktır. $x+5x=180$, $x=30$ olur. O halde açıların ölçüleri 30 ve 150 dir.

6–5. Alıştırmalar

1– İletki kullanarak 30°, 50°, 75°, 120°, 160° lik açılar çiziniz.

2–



(6–46. Şekil)

(6–46. Şekil) deki açılardan birbirinin bütünleyeni olanları yazınız.

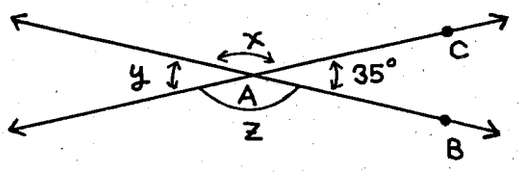
3– Aşağıdaki noktalı yerlere uygun açıyı yazınız (6–46. Şekil).

a) $m\widehat{FAD}+m\widehat{DAB}=m\ \ldots$

b) $m\widehat{CBD}+m\widehat{DBA}=m\ \ldots$

c) $m\widehat{EAB}-m\widehat{EAD}=m\ \ldots$

4–



(6–47. Şekil)

(6–47. Şekil) de $m\widehat{BAC}=35$ ise x , y , z nin değerlerini bulunuz.

5– 40° , 120° , 15° , 175° , x° , $90^\circ-x^\circ$ lik açıların bütünleyenlerini bulunuz.

6– Bir açının ölçüsü onu bütünleyen açının ölçüsünün iki katıdır. Bu açıların ölçülerini bulunuz.

7– Bir açının ölçüsü onu bütünleyenin ölçüsünden 30 fazladır. Bu açıların ölçülerini bulunuz.

6–7. Diklik, Dik Açılar, Açıların Eşliği

Bu kesimde, dik açılardan, doğru, ışın ve doğru parçalarının dikliğinden, açıların eşliğinden ve ölçülerinin eşitliğinden söz edeceğiz.

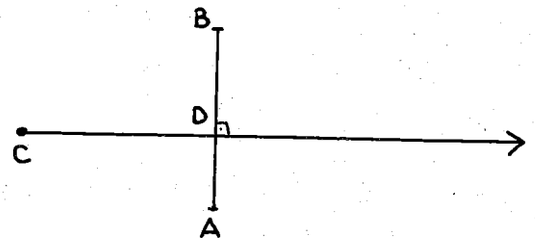
6–16. Tanım

Eğer doğrusal çift oluşturan açıların ölçüleri eşitse açılardan her biri bir dikaçıdır.

Bütünleme aksiyomuna göre $r+r=180$ olduğu için $r=90$ olur. O halde dik açının ölçüsü 90 dır.

6–17. Tanım

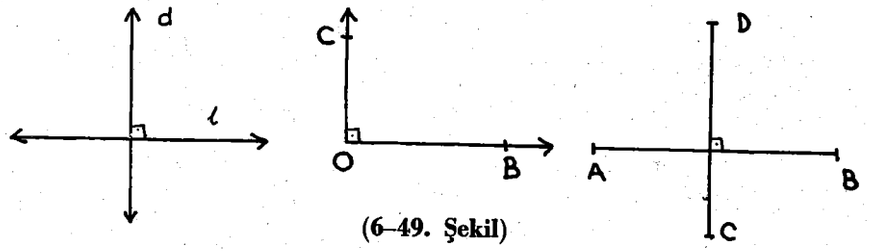
Doğru parçası, ışın veya doğru olan nokta kümeleri kesiştiklerinde bunları içine alan doğrular bir dik açı oluşturuyorlarsa bunlara diktirler, denir.



(6–48. Şekil)

[AB] doğru parçası ile [CD ışını dik ise, bunu [AB]⊥[CD biçiminde gösteririz. (6–48. Şekil).

6–12. Örnek



(6–49. Şekil)

(6–49. Şekil) lerde sırayla d ⊥ l, [OC⊥[OB ve [AB]⊥[CD] dir.

6–18. Tanım

Ölçüleri toplamı 90 olan açılara tümler açılar ve bunların herbirine diğerinin tümleyeni denir.

6–13. Örnek

m $\widehat{A}$=40, m $\widehat{B}$=50 ise $\widehat{A}$ açısı ile $\widehat{B}$ açısı birbirinin tümleyenidir.

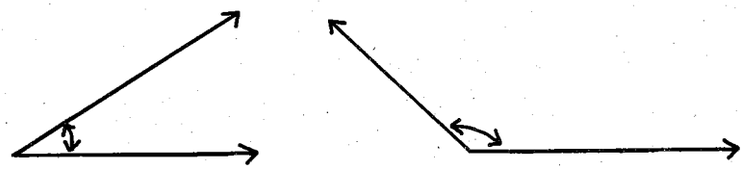
6–14. Örnek

Bir açı tümleyeninin 5 katı ise bu açıların ölçüleri kaçar derecedir)

Çözüm : Açının ölçüsü, y tümleyeninin ölçüsü x ise y=5x verilmiştir. x+y=90 olduğundan 6x=90 ve x=15, y=75 bulunur.

6–19. Tanım

Ölçüsü 90 dan küçük açıya dar açı, 90 dan büyük olan açıya geniş açı denir.



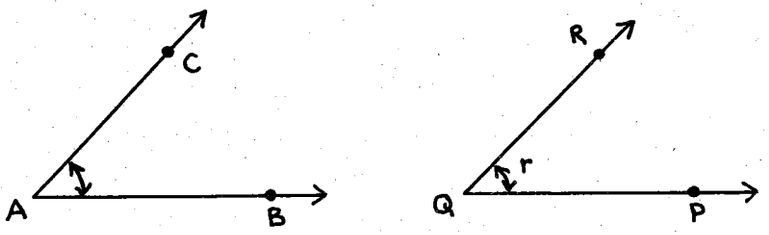
Dar açı Geniş açı

(6–50. Şekil)

Açılar birer nokta kümesi olduğundan bunları büyüklük bakımından karşılaştıramayız. Halbuki açıların ölçüsü birer reel sayı olduğundan bunların eşitliğinden ya da hangisinin daha büyük veya küçük olduğundan söz edilebilir.

6–20. Tanım

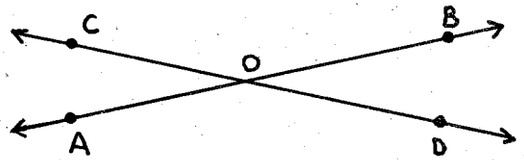
Ölçüleri eşit olan açılara eşaçılar denir. $\widehat{BAC}$ ile $\widehat{PQR}$ eşaçılar ise bu $\widehat{BAC}\cong\widehat{PQR}$ biçiminde gösterilir. (6-51. Şekil).



(6–51. Şekil)

$$m\,\widehat{BAC}=m\,\widehat{PQR} \iff \widehat{BAC}\cong\widehat{PQR}$$

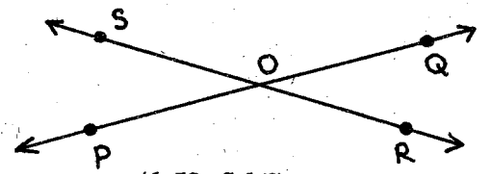
Farklı iki doğru bir O noktasında kesişirlerse dört tane açı oluştururlar. Bu açılardan birer kenarı ortak olan herhangi ikisi doğrusal çift oluştururlar. Örneğin, $\widehat{COB}$ ile $\widehat{BOD}$ bir doğrusal çift yaparlar. (6–52. Şekil),



(6–52. Şekil)

6–21. Tanım

Kenarları birbirinin zıt ışınları olan iki açıya tersaçılar denir.



(6–53. Şekil)

(6–53. Şekil) de $\widehat{POS}$ ile $\widehat{QOR}$, $\widehat{POR}$ ile $\widehat{SOQ}$ açıları tersaçılardır.

6–6. Alıştırmalar

1 – İki açı birbirini tümler ise her ikisi de dar açıdır. ispat ediniz.

2 – Her açının kendisine eş olduğunu ispatlayınız.

3 – Herhangi iki dik açı eştir. Neden?

4 – İki açı eş ve birbirini bütünler ise her birisi dik açıdır. İspatlayınız.

5 – Eş açıları bütünleyen açılar eştir. İspatlayınız.

6 – Eş açıları tümleyen açılar eştir. Neden?

7 – Ters açıların eş olduklarını gösteriniz.

8 – Kesişen iki doğrunun oluşturduğu dört açıdan biri dik ise diğerleri de diktir. İspatlayınız.

9 – Kesişen iki doğrunun oluşturduğu dört açıdan birinin ölçüsü olduğuna göre diğerlerini hesaplayınız.

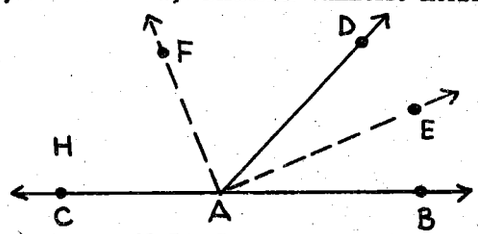
10 – Aşağıdaki ölçüleri verilen açıların tümleyenlerini bulunuz.

a) 20 b) 60 c) x d) (90—x)

11 – Ölçüleri aynı olan iki açı birbirini bütünlerse herbiri kaç derecedir?

12 – Ölçüleri aynı olan iki açı birbirini tümlerse herbiri kaç derecedir?

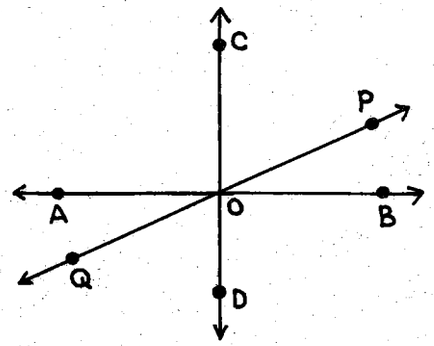
13 –



(6–54. Şekil)

(6–54. Şekil) de [AB ve [AC, H yarı düzleminin kenar doğrusu üzerinde zıt yönlü ışınlar, $\widehat{BAE} \cong \widehat{EAD}$ ve $\widehat{CAF} \cong \widehat{DAF}$ dir. m $\widehat{EAF}$ yi hesaplayınız.

14 –



(6–55. Şekil)

(6–55. Şekil) düzlemsel olup, AB, CD, PQ doğruları aynı O noktasında kesişiyorlar ve AB ⊥ CD dir. m $\widehat{BOP}$=25 ise şekildeki diğer açıların ölçülerini bulunuz.

6–8. Üçgenlerin Eşliği

Üçgenlerin eşliğini verebilmek için açıların ve doğru parçalarının eşliğinden söz edelim. Ölçüleri aynı olan iki açıya eş açılar demiştik. Şimdi de ölçüleri aynı olan doğru parçaları düşünelim. Bunlar üst üste geldiklerinde tamamen çakışırlar.

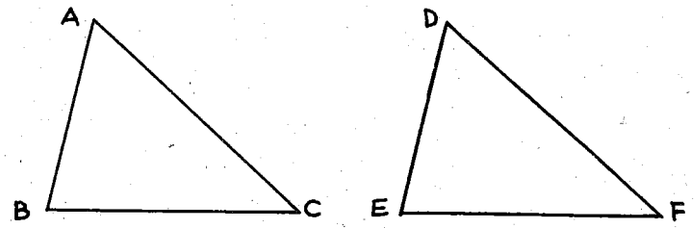
6–22. Tanım

Ölçüleri eşit olan doğru parçalarına eş doğru parçaları denir.

(6–56. Şekil)

|AB|=|CD| ise [AB] ≅ [CD] yazılır. (6–56 Şekil).

Tanımdan da anlaşıldığına göre bir doğru parçası kendi kendine eştir. Bir açının da kendi kendine eşliğini öğrenmiştik. Biz bu tür eşliklere özeşlik diyeceğiz.



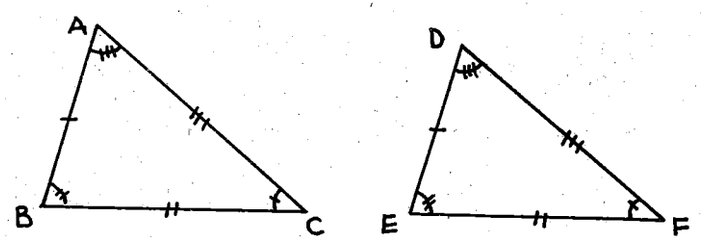
(6–57. Şekil)

$\widehat{ABC}$ üçgeni ile $\widehat{DEF}$ üçgeni arasında bir eşleme düşünelim. Bunu ABC ↔DEF biçiminde göstereceğiz. Bunun anlamı A ile D, B ile E, C ile F eşleniyor demektir. Bu eşlemeler A ↔D, B ↔E, C ↔F biçiminde gösterilir. Bu eşlemede, eşlenen elemanlara karşılıklı elemanlar diyeceğiz.

(6–57. Şekil) deki $\widehat{ABC}$ üçgeni ile $\widehat{DEF}$ üçgeni üst üste getirildiklerinde çakışırlar mı? Cevabımız kesin olamaz. Bunların üst üste çakışmaları bazı koşullara bağlı olacaktır. Bunu aşağıdaki tanımla verelim.

6–23. Tanım

İki üçgen arasında ABC ↔DEF bire-bir eşlemesi verilsin. Karşılıklı kenarlar ve açılar eş ise ABC ↔DEF eşlemesi üçgenler arasında bir eşliktir. Bu eşlik $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ biçiminde gösterilir. Bunu "$\widehat{ABC}$ üçgeni eş $\widehat{DEF}$ üçgeni" diye okuruz.



(6–58. Şekil)

(6–58. Şekil) de $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ ise,

1) $|AB|=|DE|$ veya $[AB] \cong [DE]$
2) $|BC|=|EF|$ veya $[BC] \cong [EF]$
3) $|AC|=|DF|$ veya $[AC] \cong [DF]$

4) $m\widehat{A}=m\widehat{D}$ veya $\widehat{A} \cong \widehat{D}$
5) $m\widehat{B}=m\widehat{E}$ veya $\widehat{B} \cong \widehat{E}$
6) $m\widehat{C}=m\widehat{F}$ veya $\widehat{C} \cong \widehat{F}$

olduğunu anlarız.

6–14. Örnek

$\widehat{ABC} \cong \widehat{PQR}$ veriliyor. Şekil çizmeden açılar ve doğru parçaları arasındaki eşlikleri yazalım.

Çözüm : $[AB] \cong [PQ]$, $]BC] \cong [QR]$, $[AC] \cong [PR]$ ve $\widehat{A} \cong \widehat{P}$, $\widehat{B} \cong \widehat{Q}$, $\widehat{C} \cong \widehat{R}$ dir.

6–15. Örnek

$\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ ise $\widehat{BCA} \cong \widehat{EFD}$ yazılabilir. Fakat $\widehat{ABC} \cong \widehat{EDF}$ yazılamaz. (Köşeler arasındaki bire-bir eşlemeye dikkat ediniz.)

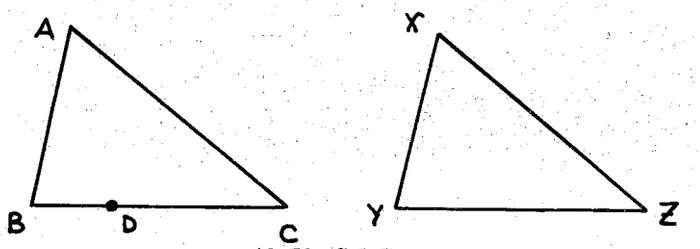
6–7. Alıştırmalar

1) $\widehat{XYZ} \cong \widehat{DEF}$ veriliyor. Birbirine eş olan açıları ve doğru parçalarını yazınız.

2) $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$ ve $\widehat{DEF} \cong \widehat{PQR}$ ise $\widehat{ABC} \cong \widehat{PQR}$ dir. İspatlayınız.

3) Üçgenler arasında tanımlanan eşlik ($\cong$) bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösteriniz.

4)



(6–59. Şekil)

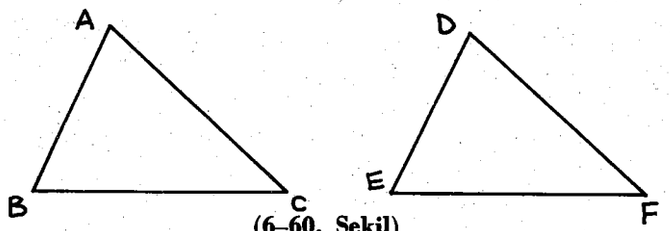
(6–59. Şekil) de $\widehat{ABC} \cong \widehat{XYZ}$ olduğuna göre aşağıda verilenler arasına = veya $\cong$ sembollerinden hangisi uygun ise onu koyunuz. hangilerine her iki sembol de konulabilir?

a) $m\hat{A}$	$m\hat{X}$
b) $\hat{B}$	$\hat{Y}$
c) [AB]	[XY]
d) |AC|	|XZ|
e) $\hat{ABD}$	$\hat{ABC}$
f) $\hat{ACD}$	$\hat{XZY}$

Bir cetvel ve bir iletki kullanarak $m\hat{A}=50$, $|AB|=4$ cm., $|AC|=5$ cm. olacak biçimde $\hat{ABC}$ üçgenini çiziniz. Sınıfta herkesin çizdiği üçgen eş olur mu? Cevabımız evet olacaktır. Bu gerçeği kenar, açı, kenar (K. A. K) aksiyomu adıyla vereceğiz.

6–13. Aksiyom (K. A. K Aksiyomu)

İki üçgen (veya bir üçgenle kendisi) arasında bir eşleme verilmiş olsun. Bu eşlemede, birinci üçgenin iki kenarı ile bunların belirttiği açı ikinci üçgenin bunlara karşılık olan elemanlarına eş ise, üçgenler eştir. (6–60. Şekil).



(6–60. Şekil)

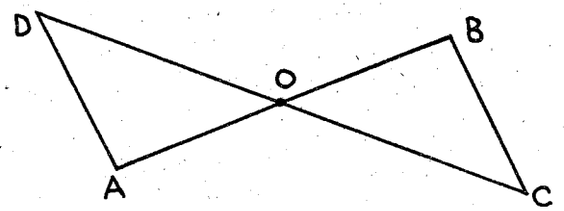
Bu aksiyom gereğince, $\hat{ABC}$ ve $\hat{DEF}$ üçgenlerinin arasında sözgelimi,

$$[AB] \cong [DE]$$
$$[AC] \cong [DF]$$
$$\hat{A} \cong \hat{D}$$

ise $\hat{ABC} \cong \hat{DEF}$ dir.

6–16. Örnek

"İki doğru parçası birbirini ortalarsa, bunların uç noktalarını birleştiren doğru parçaları eştir." teoremini ispatlayalım. Bu ispat için önce uygun bir şekil çizelim ve sonra bu teoremin hipotez hükmünü ayıralım. (6–61. Şekil).



(6–61. Şekil)

Hipotez : $|OD|=|OC|$
$|OA|=|OB|$

Hüküm : $|AD|=|BC|$

Bundan böyle ispatlarımızı genellikle iddia ve neden belirterek iki sütunda aşağıdaki biçimde yapacağız.

İddialar	Kanıtlar
1. $\|OD\| = \|OC\|$	1. Hipotez
2. $\|OA\| = \|OB\|$	2. Hipotez
3. $\hat{AOD} \cong \hat{BOC}$	3. Ters açılar eşittir.
4. $\hat{AOD} \cong \hat{BOC}$	4. K. A. K. aksiyomu (1, 2, 3. maddeler)
5. $\|AD\| = \|BC\|$	5. Eş üçgenlerin karşılıklı elemanları eştir.

Bir üçgenin üç kenarından ikisinin veya üçünün uzunlukları eşit yani kenarlardan bazıları eş olabilir. Buna göre bazı üçgenleri aşağıdaki biçimde tanımlayabiliriz.

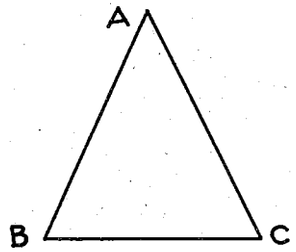
6–24. Tanım

İki kenarı eş olan üçgene ikizkenar üçgen denir. Diğer kenara taban, tabanı içine alan açılara taban açıları, ikizkenarların arakesiti olan noktaya da tepe denir.

Üç kenarı eş olan üçgene eşkenar üçgen, kenarları birbirine eş olmayan üçgene çeşitkenar üçgen denir.

6–9. Teorem (İkizkenar üçgen teoremi)

Bir üçgenin iki kenarı eş ise, bu kenarların karşısındaki açıları da eştir. (6–62. Şekil).



(6–62. Şekil)

Hipotez : $[AB] \cong [AC]$

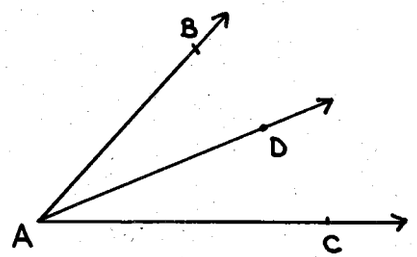
Hüküm : $\widehat{C} \cong \widehat{B}$

İspat

İddialar	Kanıtlar
1. $[AB] \cong [AC]$	1. Hipotez
2. $[AC \cong [AB]$	2. Hipotez
3. $\widehat{A} \cong \widehat{A}$	3. Özeşlik
4. $\widehat{ABC} \cong \widehat{ACB}$	4. K. A. K. aksiyomu (1, 2, 3. maddeler)
5. $\widehat{B} \cong \widehat{C}$	5. Eş üçgenlerin karşılıklı elemanları eştir.

6–12. Tanım

Eğer D noktası $\widehat{BAC}$ açısının içinde ve $\widehat{BAD} \cong \widehat{DAC}$ ise, [AD ışını $\widehat{BAC}$ açısını ortalar veya $\widehat{BAC}$ açısının açıortayıdır denir. (6–63. Şekil).



(6–63. Şekil)

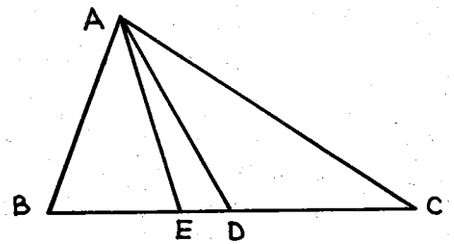
Eğer [AD, $\widehat{BAC}$ açısını ortalarsa, m $\widehat{BAD}$=m $\widehat{DAC}$ dir.

Bir açının açıortayının varlığını ve bunun yalnız bir tane olması gerektiğini açı çizme aksiyomundan yararlanarak görebilirsiniz.

Bir üçgenin de açı ortaylarından ve kenar ortaylarından söz edilir. Bunlar birer doğru parçasıdır.

6–26. Tanım

Uç noktalarından biri üçgenin bir köşesi diğeri karşı kenarın orta noktası olan doğru parçasına bu üçgenin kenarortayı, üçgenin açılarından birini ortalayan ışının köşe ile karşı kenar arasında kalan parçasına üçgenin bir açıortayı denir. (6–64. Şekil).

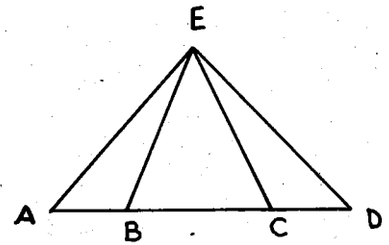


(6–64. Şekil)

[AD], A dan geçen kenarortay , [AE], A dan geçen açıortaydır. Bir üçgenin 3 tane kenarortayı ve 3 tane de açı ortayı vardır.

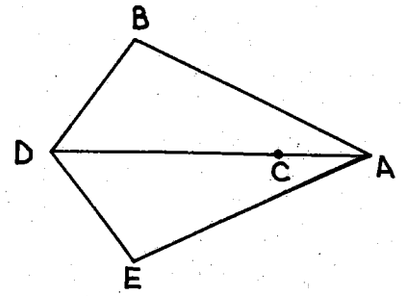
6–8. Alıştırmalar

1. (6–65. Şekil) de |EA|=|ED| ve |AB|=|DC| dir. $\widehat{AEB} \cong \widehat{DEC}$ ve $\widehat{EBC}$ üçgeninin ikizkenar olduğunu ispat ediniz.



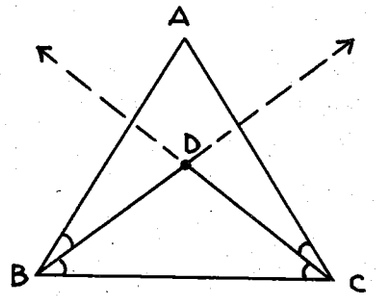
(6–65. Şekil)

2. (6–66. Şekil) de |AB|=|AE| ve $\widehat{BAC} \cong \widehat{EAC}$ verilmiştir. |DB|=|DE| olduğunu gösteriniz.



(6–66. Şekil)

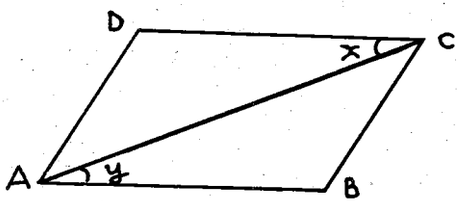
3. (6–67. Şekil) de $|AB|=|AC|$, [BD ışını $\widehat{ABC}$ nin, [CD ışını $\widehat{ACB}$ nin açıortayıdır. $|BD|=|DC|$ ve [AD nın açıortay olduğunu ispatlayınız.



(6–67. Şekil)

4. Eğer [AB] ve [CD] doğru parçaları bir E noktasında birbirlerini ortalıyorsa $\widehat{ADE} \cong \widehat{BCE}$ olduğunu ispatlayınız.

5. (6–68. Şekil) de, $|AB|=|DC|$, $x=y$ ise $\widehat{B} \cong \widehat{D}$ olduğunu ispatlayınız.



(6–68. Şekil)

6. Her eşkenar üçgenin üç açısının birbirine eş olduklarını ispatlayınız.

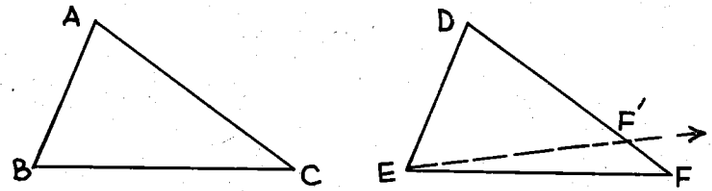
7. Bir üçgende bir kenarortay ortaladığı kenara dik ise o üçgen ikizkenardır. İspatlayınız.

8. Bir üçgenin iki kenarortayı, ortaladıkları kenarlara dik ise o üçgen eşkenardır. İspatlayınız.

9. İki eş üçgende eş kenarların kenarortaylarının da eş olduklarını ispatlayınız.

6–10. Teorem (A. K. A. Teoremi)

İki üçgen (veya bir üçgenle kendisi) arasında bir eşleme yapılıyor. Bu eşlemede birinci üçgenin iki açısı ile bu açılarda ortak olan kenarı, ikinci üçgenin bunlara karşılık olan elemanlarına eş ise, bu iki üçgen birbirine eştir. (6–69. Şekil).



(6–69. Şekil)

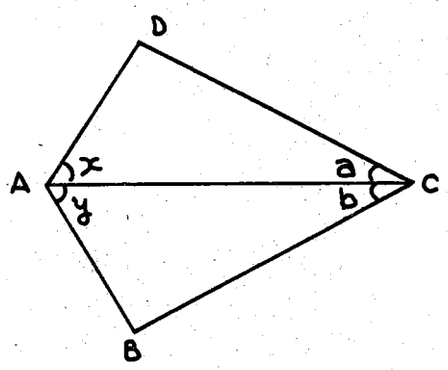
Hipotez : $\widehat{A} \cong \widehat{D}$, $\widehat{B} \cong \widehat{E}$, $|AB|=|DE|$

Hüküm : $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$

İspat :

İddialar	Kanıtlar
1. [DF ışını üzerinde $\|DF'\|=\|AC\|$	1. Nokta yerleştirme
2. $\|AB\|=\|DE\|$	2. Hipotez
3. $\widehat{A} \cong \widehat{D}$	3. Hipotez
4. $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF'}$	4. KAK Aksiyomu
5. $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$	5. Eş üçgenlerde kalşılıklı elemanlar eştir.
6. $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$	6. Hipotez
7. $\widehat{DEF'} \cong \widehat{DEF}$	7. İddia 5 ve 6 geçişme.
8. [EF ve [EF′ aynı ışındır.	8. İddia 7 ve çizme aksiyomu
9. $F=F'$	9. İki doğru en fazla bir noktada kesişir.
10. $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$	10. İddia 4 ve 9.

6–17. Örnek



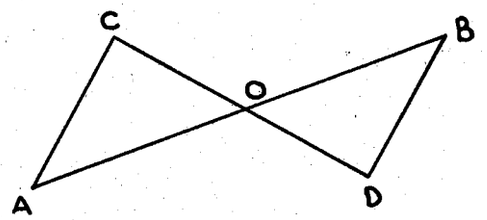
(6–70. Şekil)

(6–70. Şekil) de x=y ve a =b ise |AD|=|AB| ve $\widehat{D} \cong \widehat{B}$ olduğunu gösterelim.

İddialar	Kanıtlar
1. x=y	1. Verilmiş
2. |AC|=|AC|	2. Özeşlik
3. a=b	3. Verilmiş
4. $\widehat{ADC} \cong \widehat{ABC}$	4. A.K.A. Teoremi
5. |AD|=|AB| ve $\widehat{D} \cong \widehat{B}$	5. Eş üçgenlerde karşılıklı elemanlar

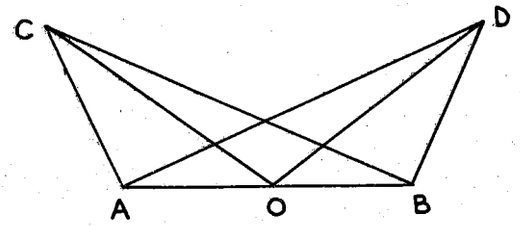
6–9. Alıştırmalar

1. $\widehat{A} \cong \widehat{B}$ ve |OA|=|OB| ise $\widehat{C} \cong \widehat{D}$ olduğunu gösteriniz. (6–71. Şekil).



(6–71. Şekil)

2. (6–72. Şekil) de 0 noktası [AB] nin ortası, $\widehat{DAB} \cong \widehat{CBA}$ ve $\widehat{COA} \cong \widehat{DOB}$ dır. [AD] ≅ [BC] olduğunu ispatlayınız.

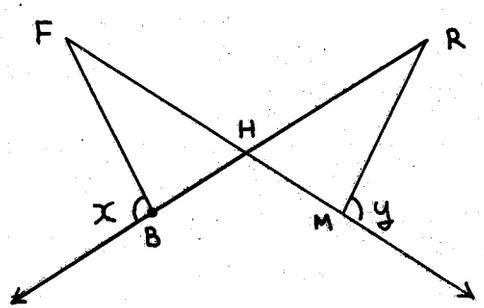


(6–72. Şekil)

3. İki eş üçgende eş açıların açıortaylarının da eş olduklarını ispatlayınız.

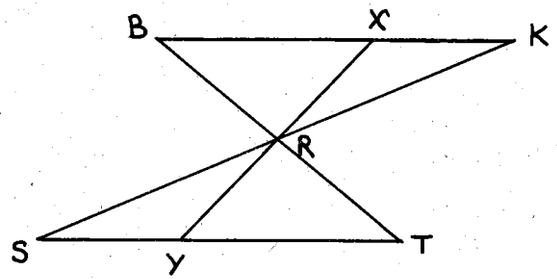
4. $\widehat{ABC}$ de $\widehat{A}$ nın açıortayı [BC] ye dik olursa $\widehat{ABC}$ üçgeni ikizkenardır. İspatlayınız.

5. (6–73. Şekil) de x=y ve |HB|=|HM| ise |HF|=|HR| olduğunu ispatlayınız.



(6–73. Şekil)

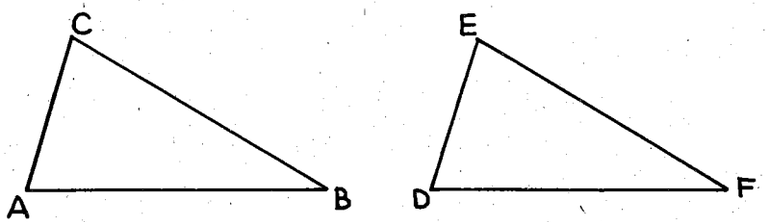
6. (6–74. Şekil) de |BK|=|TS|, $\widehat{B} \cong \widehat{T}$, $\widehat{K} \cong \widehat{S}$ ise |RX|=|RY| olduğunu ispatlayınız.



(6–74. Şekil)

6–11. Teorem (K. K. K. teoremi)

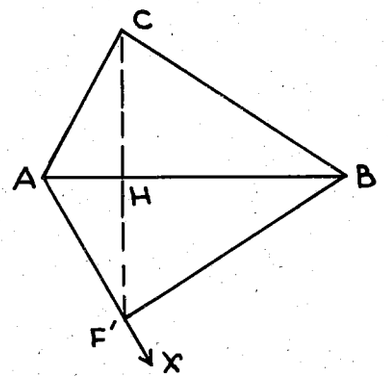
İki üçgen (veya bir üçgenle kendisi) arasında bir eşleme yapılıyor. Eğer bütün karşılıklı kenarlar eş iseler üçgenler eştir. (6–75. Şekil).



(6–75. Şekil)

Hipotez : $|AB|=|DF|$, $|BC|=|FE|$, $|AC|=|DE|$

Hüküm : $\widehat{ABC} \cong \widehat{DEF}$



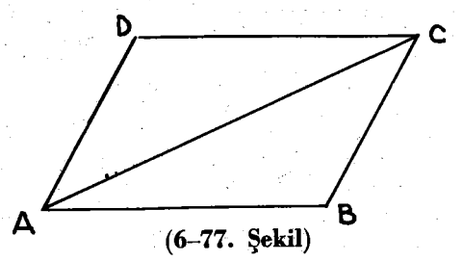
(6–76. Şekil)

İspat :

İddialar	Kanıtlar
1. C ile x, AB nin zıt tarafında $\widehat{BAx} \cong \widehat{EDF}$ olacak biçimde [Ax çizilir.	1. Açı çizme aksiyomu (6–76. Şekil).
2. [Ax üzerinde $\|AF'\|=\|DE\|$ alınır.	2. Nokta yerleştirme.
3. $\widehat{AF'B} \cong \widehat{DEF}$	3. K. A. K. aksiyomu
4. $\|AC\|=\|AF'\|$	4. Hipotez ve iddia 2
5. $\|BC\|=\|BF'\|$	5. Hipotez ve iddia 3
6. [CF'], AB yi H de keser.	6. İddia 1
7. $\widehat{ACH} \cong \widehat{AF'H}$	7. İddia 4
8. $\widehat{BCH} \cong \widehat{BF'H}$	8. İddia 5
9. $m\,\widehat{ACH}+m\,\widehat{BCH}=m\,\widehat{ACB}$	9. Açı toplama aksiyomu
10. $m\,\widehat{AF'H}+m\,\widehat{BF'H}=m\,\widehat{AF'B}$	10. Açı toplama zksiyonu
11. $\widehat{ACB} \cong \widehat{AF'B}$	11. İddia 7, 8, 9, 10
12. $\widehat{ACB} \cong \widehat{DEF}$	12. İddia 3 ve 11
13. $\widehat{ACB} \cong \widehat{DEF}$	13. İddia 12, Hipotez ve K. A. K. aksiyomu

6–18. Örnek

(6–77. Şekil) de $[AD] \cong [CB]$ ve $[DC] \cong [BA]$ dır. $\widehat{ABC} \cong \widehat{CDA}$ olduğunu ispatlayalım.



(6–77. Şekil)

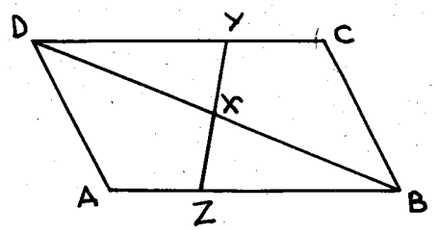
İddialar	Kanıtlar
1. [AD] ≅ [CB]	1. Verilmiş
2. [DC] ≅ [BA]	2. Verilmiş
3. [AC] ≅ [CA]	3. Özeşlik
4. $\widehat{ADC} \cong \widehat{CBA}$	4. K. K. K. teoremi
5. $\widehat{CDA} \cong \widehat{ABC}$	5. Eş üçgenlerde karşılıklı elemanlar eştir.

6–10. Alıştırmalar

1. Bir ikizkenar üçgenin tabana ait kenarortayı tabana diktir. İspatlayınız.

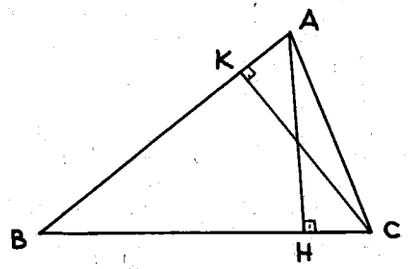
2. Bir eşkenar üçgenin her kenarortayı ortaladığı kenara diktir. İspatlayınız.

3. (6–78. Şekil) de |AD|=|BC|, |AB|=|DC| ve x noktası [DB] nin orta noktasıdır. |XY|=|ZX| olduğunu gösteriniz.



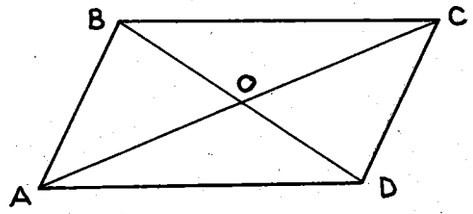
(6–78. Şekil)

4. (6–79. Şekil) de [CK] ⊥ [AB], [AH] ⊥ [BC] ve |KB|=|BH| ise |CK|=|AH| olduğunu ispatlayınız.



(6–79. Şekil)

5. ABCD düzlemsel şeklinde, |AB|=|CD| ve |AD|=|BC| dir. [AC] ile [BD] nin birbirini ortaladığını ispatlayınız. (6–80. Şekil).



(6–80. Şekil)

6–9. Paralel Doğrular

Buraya kadar doğruların kesişme durumlarını inceledik. Kesişen iki doğrunun düzlemsel olduğunu biliyorsunuz. O halde düzlemsel olmayan iki doğrunun kesişemiyeceğini söyleyebilirsiniz.

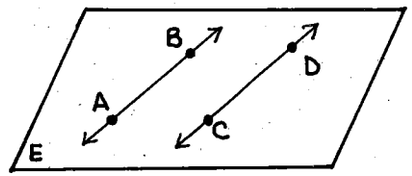
6–27. Tanım

Düzlemsel olmayan doğrulara aykırı doğrular denir.

Bu tanım bize aykırı doğruların kesişmediğini belirtir. Düzlemsel oldukları halde kesişmeyen doğrularda vardır. Biz bu kesimde düzlemsel olup ta kesişmeyen doğruları ve özeliklerini vermeye çalışacağız.

6–28. Tanım

Düzlemsel olup ta kesişmeyen doğrulara paralel doğrular denir. (6–81. Şekil).

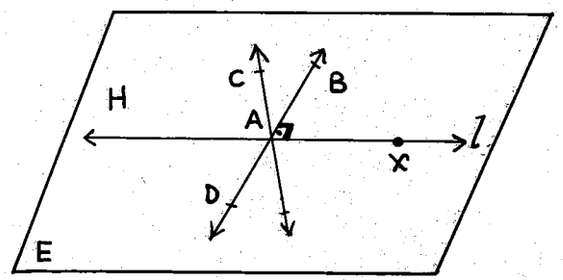


(6–81. Şekil)

Bu tanımdan sonra paralel iki doğrunun bir ve yalnız bir düzlem içinde bulunacağını sezginize bırakıyoruz. AB ve CD doğruları paralel ise bunu AB // CD biçiminde gösterip "AB paralel CD" diye okuyacağız.

6–12. Teorem

Bir düzlemin verilen bir doğrusuna üzerindeki bir noktadan bu düzlem içinde bir ve yalnız bir dik doğru çizilebilir.



(6–82. Şekil)

İspat : E düzleminde bir l doğrusu ve bunun üzerinde A ve X noktaları alalım. H yarı düzleminde $m(\widehat{XAB})=90$ olacak biçimde bir ve yalnız bir [AB ışını vardır. Buna zıt [AD ışmını çizerek ters açıların eşliğinden elde edilen dört açının da dikliğini söyleyebilirsiniz. Böyle $AB \perp l$ olur. (6–82. Şekil).

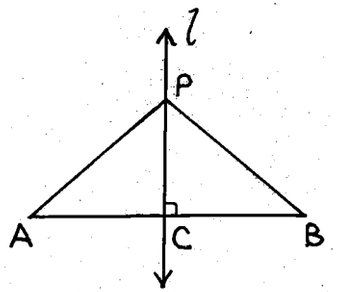
L doğrusuna E düzlemi içinde, üzerindeki A noktasından AB den başka ikinci bir AC dik doğrusu çizildiğini düşünelim. Bu durumda $m(\widehat{XAB})=m(\widehat{XAC})=90$ olacaktır. Açı çizme aksiyonuma göre AB ile AC çakışıktır.

6–29. Tanım

Bir doğru parçasının bir düzlem içindeki orta dikmesi, bu düzlem içinde doğru parçasının orta noktasından geçen ve ona dik olan doğrudur.

6–13. Teorem

Bir doğru parçasının bir düzlemdeki orta dikmesi, bu doğru parçasının iki ucundan eşit uzaklıkta bulunan bütün noktaların kümesidir. (6–83. Şekil).



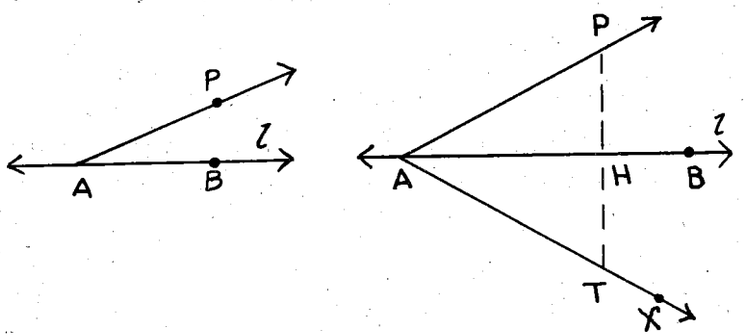
(6–83. Şekil)

İspat : (1) l nin bir P noktasını alalım. P=C ise |PA|=|PB| olur. P≠C ise |CA|=|CB|, |PC|=|PC|, $m(\widehat{PCA})=m(\widehat{PCB})=90$ olduğundan K. A. K. aksiyomu gereğince $\widehat{PCA} \cong \widehat{PCB}$ ve buradan |PA|=|PB| olur.

(2) P noktası E düzleminde ve |PA|=|PB| ise K. K. K. teoreminden $\widehat{PCA} \cong \widehat{PCB}$ ve buradan $m(\widehat{PCA})=m(\widehat{PCB})$ olur. Bu iki açı doğrusal çift oluşturduğundan her biri dik açıdır. Yani $l \perp$ [AB] dir.

6–14. Teorem

Verilen bir doğruya dışındaki bir noktadan bir ve yalnız bir dik doğru çizilebilir. (6–84. Şekil).

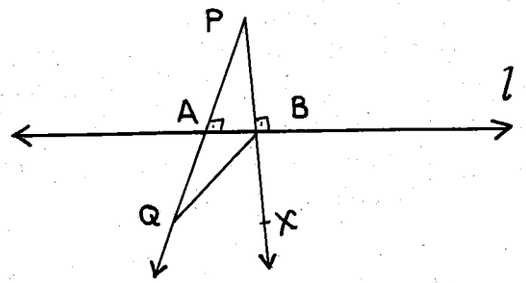


(6–84. Şekil)

İspat :

İddialar	Kanıtlar
1. X ve P, ℓ nin zıt tarafından olmak üzere $\widehat{PAB} \cong \widehat{xAB}$ olacak biçimde bir [Ax vardır.	1. Açı çizme aksiyomu
2. $\|AP\| = \|AT\|$ olacak biçimde [Ax üzerinde nir T noktası vardır.	2. Nokta yerleştirme
3. [TP], ℓ yi H de keser.	3. [AP ve [Ax farklı yarı düzlemdedir.
4. $\widehat{PAH} \cong \widehat{TAH}$	4. K. A K. aksiyomu
5. $\widehat{AHP} \cong \widehat{AHT}$	5. Eş üçgenlerde karşılıklı elemanlar.
6. $\widehat{AHP}$ dik açıdır.	6. Bütünleme ve iddia 5
7. $PT \perp \ell$	7. Diklik tanımı

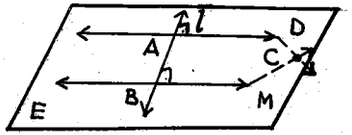
Bu kanıtlama bize ℓ doğrusuna dışındaki P noktasından bir dik doğrunun çizilebileceğini gösterir. Şimdi bu dik doğrunun tekliğini ispatlayalım. Farklı PA ve PB dik doğrularının çizildiğini düşünelim. K. A. K. aksiyomundan $\widehat{PAB} \cong \widehat{QAB}$ dir. Buradan m ABQ=90 olur. O zaman B noktasından ℓ doğrusuna BQ ve Bx dikleri çizilmiş olur ki bu 6–12. teoremine aykırıdır. (6–85. Şekil).



(6–85. Şekil)

6–15. Teorem

Bir düzlem içinde aynı doğruya dik olan iki doğru birbirine paraleldir. (6–86. Şekil).

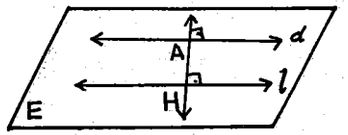


(6–86. Şekil)

İspat :

Olmayana ergi metodunu kullanalım. D ile M paralel değilse bir C noktasında kesişirler. O zaman C den ℓ ye iki dik çizilmiş olur. Bu da 6–14. Teoremine aykırıdır.

Bir doğruya dışındaki bir noktadan en az bir paralel doğru çizilebileceğini gösterelim. A ile ℓ nin belirttiği düzlem E olsun. $AH \perp \ell$ çizelim.



(6–87. Şekil)

A noktasından da $d \perp AH$ çizelim. $d \parallel \ell$ olur O halde, ℓ ye dışındaki A noktasından bir d paraleli çizilmiş oldu. (6–87. Şekil).

Şimdiye kadar verdiğimiz aksiyomlarda bir doğruya dışındaki bir noktadan en çok bir paralel çizilebileceğini ispatlamamız olanaksızdır. Bunu bir aksiyom olarak alacağız.

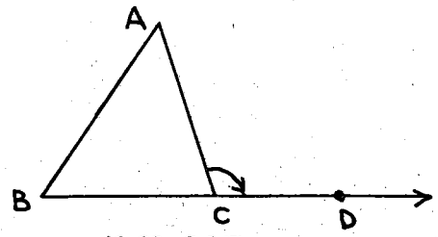
6–14. Aksiyom (Paralellik Aksiyomu)

Bir doğruya dışındaki bir noktadan en çok bir paralel doğru çizilebilir.

Şimdi de iki doğruyu kesen üçüncü bir doğru düşünelim. Kesişen bu üç doğrudan ikisinin paralel olması bize bazı önemli bilgiler kazandıracaktır.

6–30. Tanım

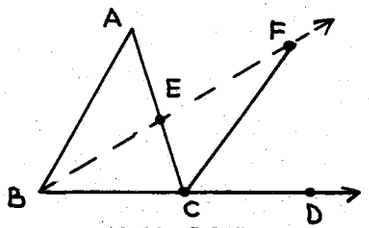
Bir $\widehat{ABC}$ üçgeninde [BC ışını üzerinde : C, B ile D arasında olacak biçimde bir D noktası alalım. $\widehat{ACD}$ açısına bu üçgenin bir dış açısı, $\widehat{A}$ ve $\widehat{B}$ açılarına da bu dış açıya komşu olmayan iç açılar denir. (6–88. Şekil).



(6–88. Şekil)

6–16. Teorem

Bir üçgende bir dış açının ölçüsü kendine komşu olmayan iç açıların herbirinin ölçüsünden büyüktür.



(6–89. Şekil)

İspat :

$\widehat{ABC}$ üçgeninde [AC] kenarının orta noktası E olsun. [BE ışınını çizelim. Bu ışın üzerinde (6–89. Şekil) de olduğu gibi |BE|=|EF| olacak biçimde bir F noktası alalım.

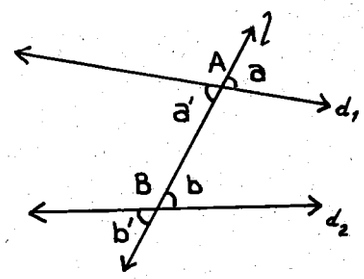
İddialar	Kanıtlar
1. $\|AE\|=\|EC\|$	1. Orta nokta tanımı
2. $\|BE\|=\|EF\|$	2. Çizim.
3. $A\widehat{E}B \cong F\widehat{E}C$	3. Ters açılar eştir.
4. $\widehat{AEB} \cong \widehat{CEF}$	4. K. A. K. Aksiyomu
5. $m\widehat{A}=m\widehat{ECF}$	5. madde
6. $m\widehat{ECF}+m\widehat{FCD}=m\widehat{ACD}$	6. Açı ölçülerini toplama
7. $m\widehat{BCF}<m\widehat{ACD}$	7. 6. madde
8. $m\widehat{A}<m\widehat{ACD}$	8. 5. ve 7, madde

Benzer biçimde $m\widehat{B} < m\widehat{ACD}$ olduğu da kanıtlanabilir.

Sonuç : Bir açısı dik açı olan üçgenin diğer açıları dar açıdır.

6–31. Tanım

Düzlemde iki doğruyla farklı iki noktada kesişen doğruya kesen denir.



(6–90. Şekil)

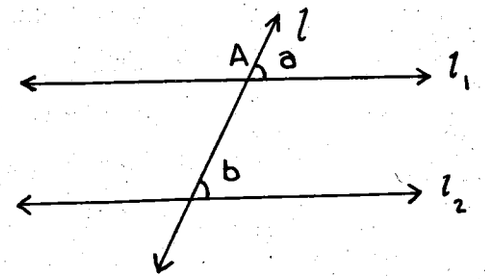
(6–90. Şekil) de l doğrusu d_1 ve d_2 doğrularını farklı iki noktada, A ve B de kesmektedir. O halde, l bir kesendir.

Ölçüleri, a, b ile gösterilen iki açıya yöndeş, a', b ile gösterilen iki açıya içters, a, b' ile gösterilen iki açıya da dışters açılar denir. (6–90. Şekil).

$d_1 \parallel d_2$ durumunda yukarıda tanımı yaptığımız açılardan bazıları birbirine eş olurlar.

6–17. Teorem

İki doğru, bir kesenle kesildiğinde yöndeş açılardan bir çifti eş ise doğrular birbirlerine paraleldir. (6–91. Şekil).

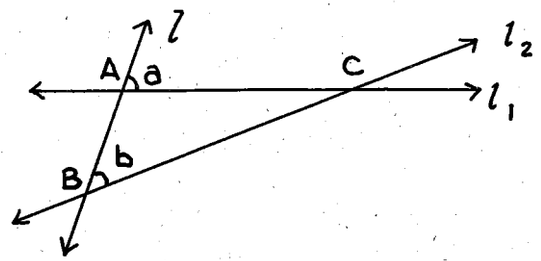


(6–91. Şekil)

Hipotez : a=b

Hüküm : $l_1 \parallel l_2$

İspat : l_1 ve l_2 düzlemsel olduklarından paralel değilseler kesişeceklerdir. (6–92. Şekil).



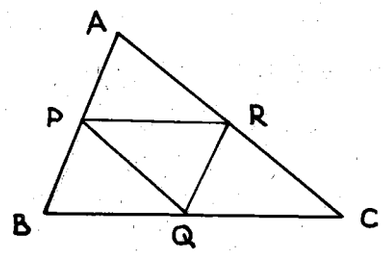
(6–92. Şekil)

$\widehat{ABC}$ de a dış açı olduğundan b den büyüktür. Bu ise a=b hipotezimize aykırıdır.

Sonuç : İki doğru bir kesenle kesildiğinde, eğer bir çift içters açı eş ise doğrular birbirine paraleldir. (İçters açılardan birinin ters açısı ile diğeri yöndeştir).

6–11. Alıştırmalar

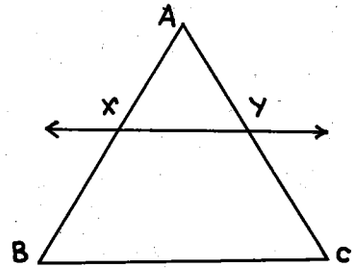
1. (6–93. Şekil) de $|BQ|=|QC|=|PR|$, $|AR|=|RC|=|PQ|$, $|AP|=|PB|=|QR|$ dir. $m\widehat{A}+m\widehat{B}+m\widehat{C}=180$ olduğunu ispatlayınız.



(6–93. Şekil)

Yol : Q noktasından oluşan açıların $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ açılarına eş olduklarını gösteriniz.

2. (6–94. Şekil) de $|AX|=|XB|$, $|AY|=|YC|$ ve $|AB|=|AC|$ dir. $XY \,//\, BC$ olduğunu gösteriniz.



(6–94. Şekil)

3. Aynı doğruya dik oldukları halde paralel olmayan doğrular var mıdır? Bu doğrulara nasıl doğrular denir?

4. Bir ikizkenar üçgende bir kenara paralel olan ve diğer iki kenarı kesen bir doğru yeni bir ikizkenar üçgen oluşturur. İspatlayınız.

5. İki paralel doğru bir kesenle kesildiğinde meydana gelen yöndeş açılar eştir. İspatlayınız.

6. İki paralel doğru bir kesenle kesildiğinde meydana gelen içters açılar eştir. İspatlayınız.

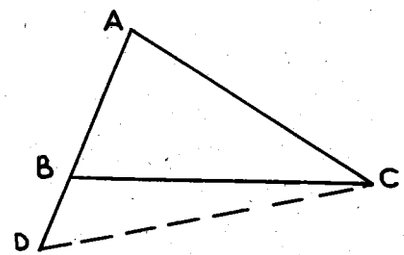
7. Bir kesen paralel iki doğrudan birine dikse diğerine de diktir. İspatlayınız.

8. Düzlemde kenarları aynı yönde paralel olan açılar birbirine eştir. İspatlayınız.

6–10. Üçgenlerin Kenarları ile Açıları Arasındaki Eşitsizlikler

6–18. Teorem

Bir üçgende iki kenar eş değilse bunlardan büyüğünün karşısındaki açının ölçüsü diğerinin karşısındaki açının ölçüsünden büyüktür. (6-95. Şekil).



(6–95. Şekil)

Hipotez : $|AC|>|AB|$

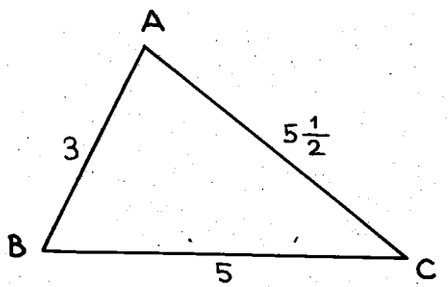
Hüküm : $m\hat{B}>m\hat{C}$

İspat :

İddialar	Kanıtlar
1. [AB ışını üzerinde $\|AD\|=\|AC\|$ alınır.	1. Nokta yerleştirme ve $\|AC\|<\|AB\|$
2. $m\hat{ADC}=m\hat{ACD}$	2. İkizkenar üçgenin taban açıları
3. $m\hat{ACB}+m\hat{BCD}=m\hat{ACD}$	3. Açı toplamı
4. $m\hat{ACD}>m\hat{ACB}$	4. İddia 3 ve a+u=b ise b>a
5. $m\hat{ABC}>m\hat{ADC}$	5. İddia 2 ve dışaçı teoremi
6. $m\hat{B}>m\hat{C}$	6. İddia 5

6–19. Örnek

(6–96. Şekil) deki üçgenin kenar uzunlukları verilmiştir. Açılarını büyüklük sırasına göre yazınız.

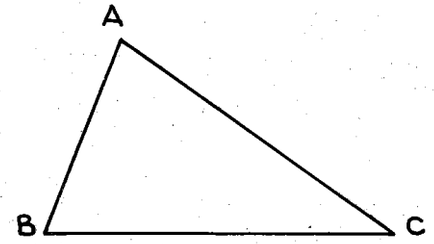


(6–96. Şekil)

Çözüm : $m\hat{B}>m\hat{A}>m\hat{C}$ dir.

6–19. Teorem

Bir üçgende iki açı eş değilse, bunlardan büyük açının karşısındaki kenar diğerinin karşısındaki kenardan büyüktür. (6–97. Şekil).



(6–97. Şekil)

Hipotez : $m\hat{B}>m\hat{C}$

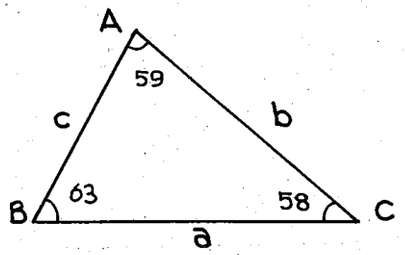
Hüküm : $|AC|>|AB|$

İspat :

Olmayana ergi metodu ile yapalım. $|AC|>|AB|$ değilse $|AC|=|AB|$ veya $|AC|<|AB|$ ve buradan da $m\hat{B}=m\hat{C}$ veya $m\hat{B}<m\hat{C}$ olur ki bu sonuçlar hipotezimize aykırıdır.

6–20. Örnek

(6–98. Şakil) deki üçgenin açılarının ölçüleri verilmiştir. Kenarlalarını büyüklük sırasına göre yazınız.

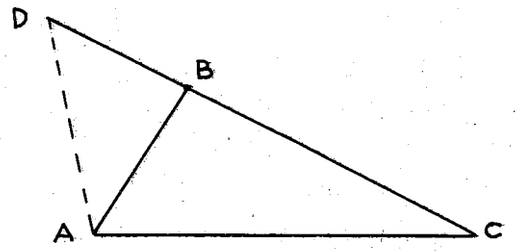


(6–98. Şekil)

Çözüm : b>a>c dir.

6–20. Teorem (Üçgen Eşitsizliği)

Bir üçgenin iki kenarının uzunlukları toplamı üçüncü kenar uzunluğundan büyüktür. (6–99. Şekil).



(6–99. Şekil)

Hipotez : $\widehat{ABC}$ herhangibir üçgen

Hüküm : $|AB|+|BC|>|AC|$

İspat :

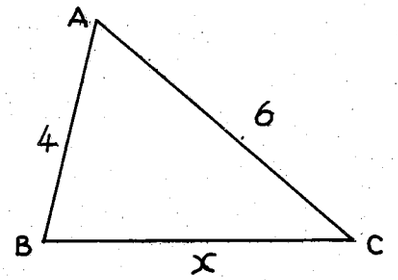
İddialar	Kanıtlar
1. [BC ye zıt ışın üzerinde $\|BD\|=\|AB\|$ alınır.	1. Nokta yerleştirme
2. $\|DC\|=\|DB\|+\|BC\|$	2. Arada olma
3. B noktası $\widehat{DAC}$ nın içindedir.	3. İddia 2
4. $m\widehat{DAB}<m\widehat{DAC}$	4. İddia 3 ve açı toplama aksiyomu
5. $m\widehat{ADB}=m\widehat{DAB}$	5. İkizkenar üçgende taban açıları
6. $m\widehat{ADB}<m\widehat{DAC}$	6. İddia 4, 5
7. $\|DC\|>\|AC\|$	7. Büyük açı karşısında büyük kenar bulunur.
8. $\|AB\|+\|BC\|>\|AC\|$	8. İddia 1, 2 ve 7

Benzer biçimde $|AB|+|AC|>|BC|$ ve $|AC|+|BC|>|AB|$ olduğu da ispatlanabilir.

6–20. Teoremde $|AB|+|BC|>|AC|$ dir. Buradan $|AB|>|AC|-|BC|$ elde edilir. Yani bir üçgende iki kenarın uzunlukları farkı üçüncü kenardan küçüktür.

6–21. Örnek

(6–100. Şekil) de iki kenarı verilen üçgenin üçüncü kenarının uzunluğu hangi değerler arasında değişebilir?

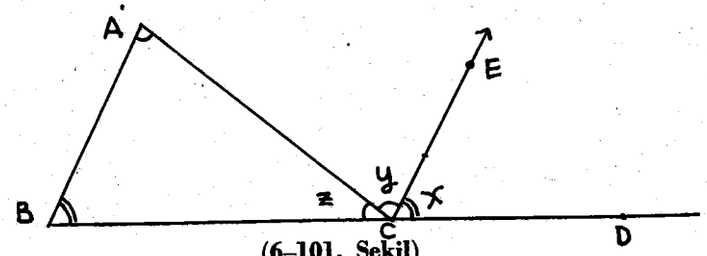


(6–100. Şekil)

Çözüm : $x<4+6$ ve $x>6-4$ eşitsizliklerinden x in alacağı değer 2 ile 10 arasındadır.

6–21. Teorem

Bir üçgenin açılarının ölçüleri toplamı 180 dir. (6–101. Şekil).



(6–101. Şekil)

İspat : $m\widehat{A}=y$,([AB] // [CE ve içters açılar)

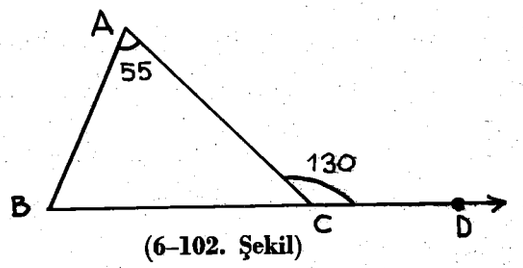
$m\widehat{B}=x$,(Yöndeş açılar)

$m\widehat{C}=z$,(Özeşlik)

Üç eşitlik toplanırsa $m\widehat{A}+m\widehat{B}+m\widehat{C}=x+y+z=180$ elde edilir.

6–22. Örnek

(6–102. Şekil) de verilen üçgenin açılarını hesaplayınız.



(6–102. Şekil)

Çözüm : $m\widehat{ACD}=130 \Rightarrow m\widehat{C}=50$

$m\widehat{A}=55$ ve $m\widehat{C}=50 \Rightarrow m\widehat{B}=75$

6–12. Alıştırmalar

1. Bir üçgende bir yükseklik ait olmadığı her iki kenardan daha küçüktür. İspatlayınız.

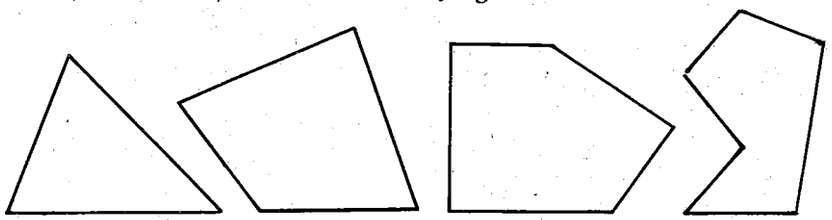
2. Bir üçgende üç yüksekliğin uzunluklarının toplamının üçgenin kenarlarının uzunlukları toplamından küçük olduğunu gösteriniz.

3. Bir E düzlemi içinde D doğrusu ve onun aynı tarafında A ve B noktaları veriliyor. D üzerinde öyle bir P noktası bulunuz ki, $|AP| + |BP|$ en küçük olsun. (P den D ye indirilen dikmeyi kendisi kadar uzatınız.)

4. Bir üçgende bir dış açının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir. İspatlayınız.

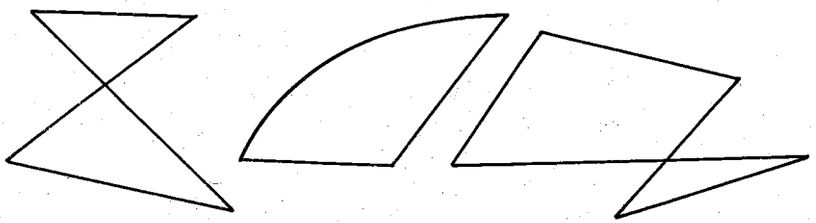
6–11. Çokgenler

(6–103. Şekil) lerin herbiri bir çokgendir.



(6–103. Şekil)

(6–104. Şekil) ler ise çokgen değildir.



(6–104. Şekil)

6–32. Tanım

$n \geqslant 3$ olmak üzere $P_1, P_2, \ldots, P_n$ bir düzlemin birbirinden farklı n noktası olsun. $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n, P_nP_1$ doğru parçaları aşağıdaki özelikleri sağlasınlar :

(1) Uç noktaları hariç, doğru parçaları kesişmezler.

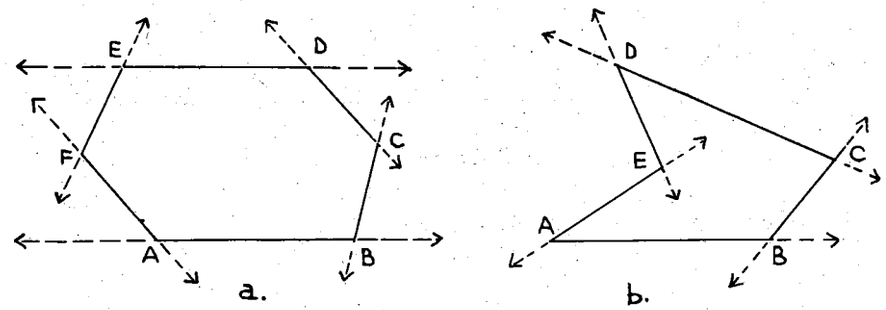
(2) Ortak uç noktaları olan doğru parçaları doğrusal olamazlar.

Bu koşulları sağlayan n doğru parçasının birleşimi olan kümeye **çokgen** denir.

Yukarıda sözü edilen n noktaya çokgenin **köşeleri**, n doğru parçasına da **çokgenin kenarları** denir. Uç noktaları ortak olan iki doğru parçasının oluşturduğu açılara da **çokgenin açıları** denir.

Çokgenler kenarlarının sayısına göre isim alırlar. 3 kenarlı ise üçgen, 4 kenarlı ise dörtgen, 5 kenarlı ise beşgen, . . . , n kenarlı ise n–gen denir.

Çokgenin her kenarı, düzlemi iki yarı düzleme ayıran bir doğru belirtir. Her kenarın belirttiği doğruya göre çokgenin diğer bütün elemanları aynı yarı düzlemde kalırsa, böyle çokgenlere **konveks çokgen** denir.



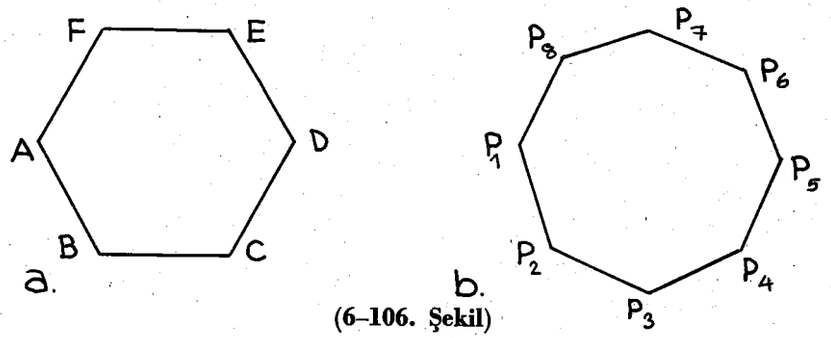
(6–105. Şekil)

(6–105a. Şekil) konveks bir altıgendir. (6–105b Şekil) ise konveks olmayan bir beşgendir.

Bir çokgenin bütün kenarları aynı uzunlukta olabilir.

6–33. Tanım

Bütün kenarları ve açıları eş olan bir konveks çokgene **düzgün** çokgen denir.

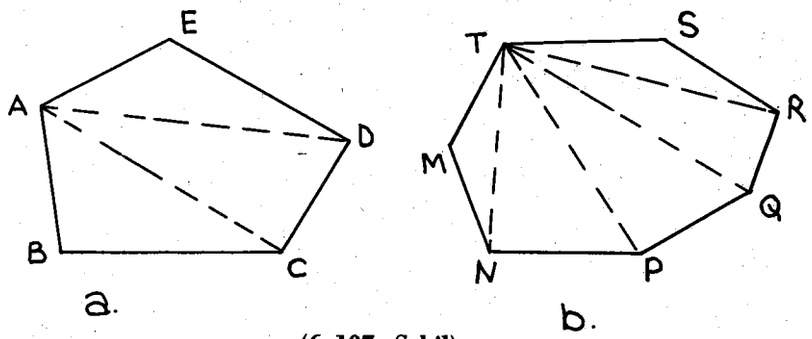


(6–106. Şekil)

(6–106a Şekil) bir düzgün altıgen, (6–106b. Şekil) ise bir düzgün sekizgendir. Yani (6–106a. Şekil) de, $|AB|=|BC|=|CD|=|DE|=|EF|=|FA|$, ve $m\widehat{A}=m\widehat{B}=m\widehat{C}=m\widehat{D}=m\widehat{E}=m\widehat{F}$ dir.

6–34. Tanım

Bir çokgende, ardışık olmayan iki köşeyi birleştiren doğru parçasına çokgenin **bir köşegeni** denir.



(6–107. Şekil)

(6–107a. Şekil) deki ABCDE beşgeninde A köşesinden çizilen köşegenler sayısı 2 tane, (6–107b. Şekil) deki MNPQRST yedigeninde de T den çizilen 5 tane köşegen vardır. Bu çokgenlerin açılarının ölçüleri toplamını düşünürsek (6–107a. Şekil) deki beşgende 3 tane üçgen oluş-

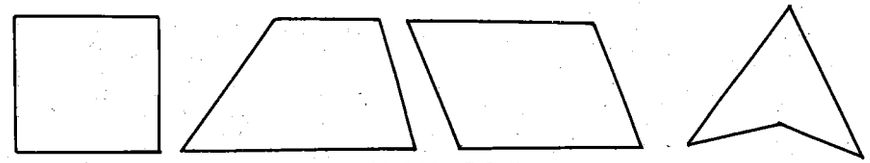
muştur. Her üçgende açıların ölçüleri toplamı 180 olduğundan beşgenin açılarının ölçüleri toplamı $3x180=540$ dır. Aynı biçimde (6–107b. Şekil) deki yedigenin açılarının ölçüleri toplamı da $5x180=900$ olur. Sezgimizle anlıyoruz ki bir köşeden çizilen köşegenlerin ayırdığı üçgen sayısı kenar sayısından 2 eksiktir. O halde n kenarlı bir çokgenin açılarının ölçüleri toplamı $(n-2).180$ dir.

6–24. Örnek

12 kenarlı bir çokgenin açılarının ölçüleri toplamını bulalım.

Çözüm : $n=12$ olduğundan açıların ölçüleri toplamı $(n-2).180=(12-2).180=10x180=1800$ dir.

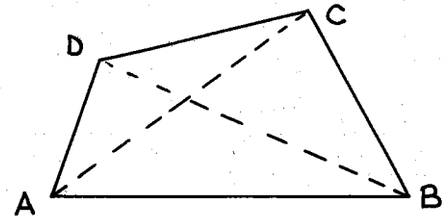
Çokgenlerde $n=3$ olması durumunu üçgenler olarak inceledik. Şimdi $n=4$ olması durumunu ele alalım. O zaman dörtgenlerden söz edeceğiz, demektir. (6–108. Şekil) lerin herbiri bir dörtgendir.



(6–108. Şekil)

6–35. Tanım

(6–109. Şekil) de görüldüğü gibi dört kenarlı çokgene dörtgen, A, B, C, D noktalarına dörtgenin köşeleri, [AB] , [BC] , [CD] , [DA] doğru parçalarına da dörtgenin kenarları denir.



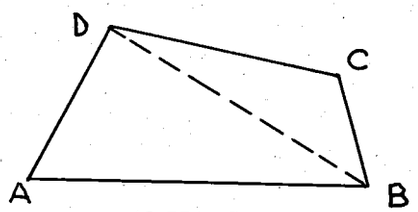
(6–109. Şekil)

Bir dörtgende kesişmeyen kenarlara karşı kenarlar, ortak kenarları olmayan açılara **karşı açılar,** bir köşede kesişen iki kenara **ardışık kenarlar,** birer kenarları ortak olan iki açıya **ardışık açılar,** ardışık olmayan köşeleri birleştiren doğru parçalarına da **köşegen** denir.

(6–109. Şekil) de A ile C karşı açılar, [DB] bir köşegen, [AB] ile [BC] ardışık kenarlardır.

6–22. Teorem

Bir dörtgenin açılarının ölçüleri toplamı 360 dır. (6–110. Şekil).



(6–110. Şekil)

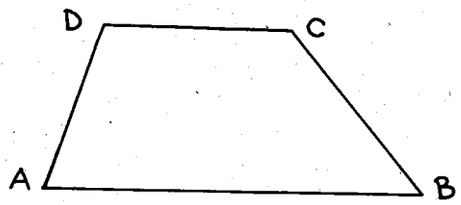
İspat :

ABCD dörtgeninde [BD] köşegenini çizersek $\widehat{ABD}$ ile $\widehat{CBD}$ üçgenleri elde edilir. Bu iki üçgenin açılarının ölçüleri toplamı, ABCD dörtgeninin açılarının ölçüleri toplamına eşittir. O halde herhangi bir dörtgenin 4 açısının ölçüleri toplamı 360 dır.

Şimdi de bazı dörtgenlerin tanımlarını verelim ve bunların önemli özeliklerini ispatlayalım.

6–36. Tanım

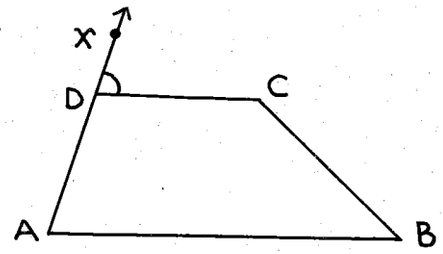
Yalnız karşı iki kenarı paralel olan dörtgene yamuk denir. (6–111. Şekil)



(6–111. Şekil)

6–23. Teorem

Bir yamukta paralel olmayan kenarlardan birini ortak kenar alan iki açı birbirini bütünler (6–112. Şekil).



(6–112. Şekil)

Hipotez : ABCD yamuk

Hüküm : $m\widehat{A}+m\widehat{D}=180$

İspat :

[AD ışınını çizelim. $m\widehat{XDC}=m\widehat{A}$ (yöndeş açılar)

$m\ \widehat{XDC}+m\ \widehat{D}=180$ olduğundan $m\ \widehat{A}+m\ \widehat{D}=180$ olur.

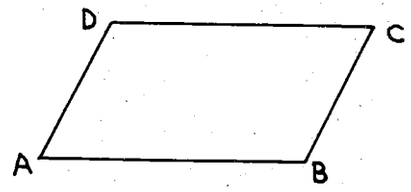
6–24. Örnek

Bir yamukta [AB] // [CD] , $m\widehat{B}=50$, $m\widehat{A}=70$ olduğuna göre $m\widehat{D}$ ve $m\widehat{C}$ yi bulalım.

Çözüm : $m\widehat{D}=110$, $m\widehat{C}=130$ olur.

6–37. Tanım

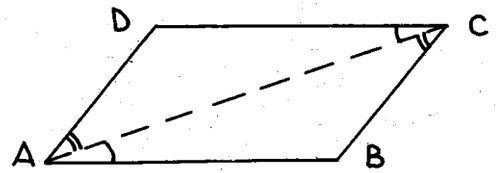
Karşılıklı kenarları ikişer ikişer paralel olan dörtgene **paralelkenar** denir. (6–113. Şekil).



(6–113. Şekil)

6–24. Teorem

Bir paralelkenarda bir köşegen paralelkenarı iki eş üçgene ayırır. (6–114. Şekil).



(6–114. Şekil)

Hipotez : ABCD paralelkenar

Hüküm : $\widehat{ABC} \cong \widehat{CDA}$

İspat :

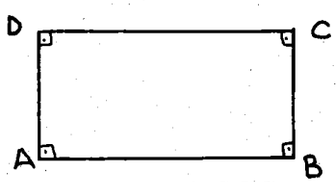
İddialar	Kanıtlar
1. $\|AC\| = \|CA\|$	1. Özeşlik
2. $\widehat{BAC} \cong \widehat{DCA}$	2. [AB] // [CD] ve içters açılar
3. $\widehat{ABC} \cong \widehat{CDA}$	3. [AD] // [BC] ve içters açılar
4. $\widehat{ABC} \cong \widehat{CDA}$	4. A.K.A. teoremi

Sonuçlar : 1) $|AB| = |CD|$, $|BC| = |DA|$

2) $m\widehat{B} = m\widehat{D}$, $m\widehat{A} = m\widehat{C}$

6–38. Tanım

Bütün açıları dik olan paralelkenara dikdörtgen denir. (6–115. Şekil).



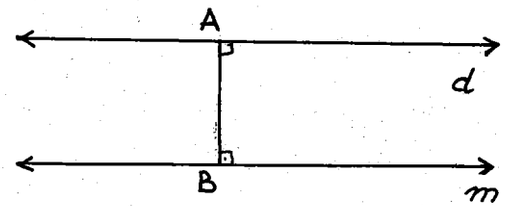
(6–115. Şekil)

Dikdörtgen aynı zamanda bir paralelkenar olduğundan paralelkenardaki özelikler dikdörtgende de vardır.

İki nokta arasındaki uzaklığı tanımlamıştık. Şimdi de paralel iki doğru arasındaki uzaklığı tanımlayalım.

6–39. Tanım

İki paralel doğru arasındaki uzaklık, bunlara dik olan doğru parçasının uzunluğudur.

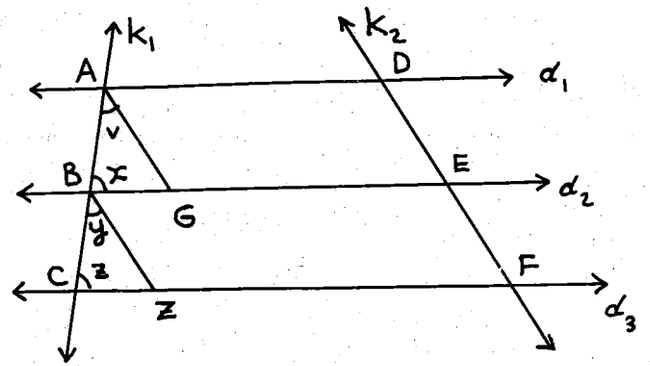


(6–116. Şekil)

(6–116. Şekil) de $d \parallel m$ dir. Aralarındaki uzaklık ise |AB| dir.

6–24. Teorem

Üç paralel doğru bir kesen üzerinde eş parçalar ayırırsa, her kesen üzerinde de eş parçalar ayırır. (6–117. Şekil).



(6–117. Şekil)

Hipotez : $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$ ve $|AB| = |BC|$

Hüküm : $|DE| = |EF|$

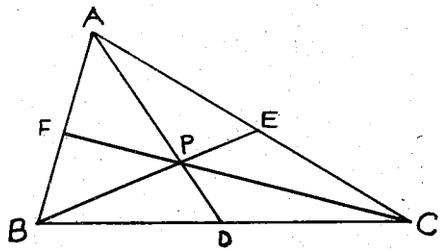
İspat :

İddialar	Kanıtlar
1. A ve B den k_2 ye AG ve BZ paraleli çizelim.	1. Paralellik aksiyomu
2. x=z ve v=y	2. Paralel iki doğru bir kesenle kesildiğinden yöndeş açılar eştir.
3. |AB|=|BC|	3. Varsayım
4. $\widehat{ABG}=\widehat{BCZ}$	4. A.K.A. teoremi
5. |AG|=|BZ|	5. İddia 4
6. AGED ve BZFE paralelkenar	6. Paralelkenar tanımı.
7. |AG|=|DE| ve |BZ|=|EF|	7. Paralelkenarda karşılıklı kenarlar eştir.
8. |DE|=|EF|	8. İddia 5 ve 7

Sonuç : Üç veya çok sayıda paralel doğru bir kesen üzerinde eş parçalar ayırırsa her kesen üzerinde eş parçalar ayırır.

6–26. Teorem

Bir üçgenin kenarortayları bir noktada kesişir. Kesim noktasının bir köşeye uzaklığı, o köşeden geçen kenarortayın üçte ikisine eşittir. (6–118. Şekil).



(6–118. Şekil)

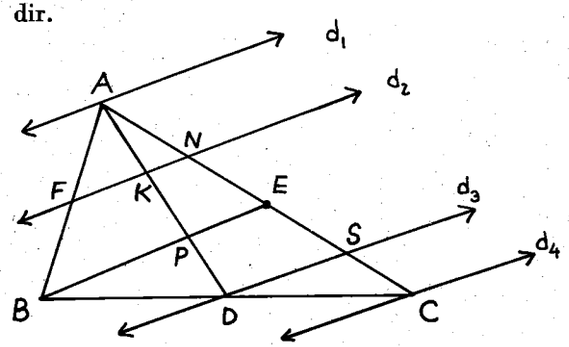
Hipotez : D, E, F sırasıyla [BC], [CA], [AB] nin orta noktaları

Hüküm : [AD], [BE], [CF] bir noktada kesişirler ve

$$|AP|=\frac{2}{3}|AD|\ ,\ |BP|=\frac{2}{3}|BE|\ \text{ve}|P\ C|=\frac{2}{3}\cdot|FC|\ \text{dir.}$$

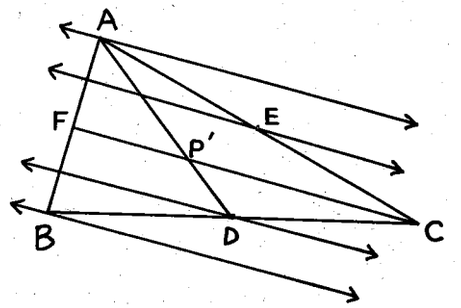
İspat

1. (6–119. Şekil) de [AD] ve [BE] kenarortaylarının kesim noktası P olsun. A, F, D, C noktalarından sıra ile [BE] kenarortayına d_1, d_2, d_3, d_4 paralel doğrularını çizelim. Buradan |AN| = |NE| = |ES| = |SC| ve |AK| = |KP| = |PD| olur. O halde $|AP|=\frac{2}{3}\cdot|AD|$ dir.



(6–119. Şekil)

2. (6–120. Şekil) de [AD] ve [CF] kenarortaylarının kesim noktası P′ olsun. Benzer biçimde A, E, D, B noktalarından [CF] kenarortayına paraleller çizerek $|AP'|=\frac{2}{3}\cdot|AD|$ bulunur.

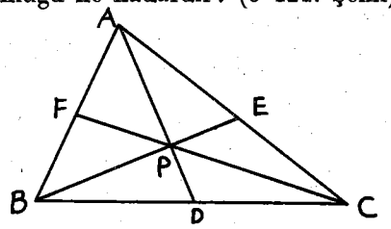


(6–120. Şekil)

İspatın 1. ve 2. adımlarında bulduğumuz |AP|=|AP′| eşitliğinden P = P′ olur. O halde üç kenarortay bir P noktasında kesişirler. $|PA|=\frac{2}{3}\cdot|AD|$ bulundu. Bunun gibi $|PB|=\frac{2}{3}\cdot|BE|$ ve $|CP|=\frac{2}{3}\cdot|CF|$ olduğu görülür.

6–25. Örnek

$\widehat{ABC}$ üçgeninde kenarortaylar P de kesişsinler. $|AP|=4$ ise $|AD|$ kenarortayının uzunluğu ne kadardır? (6–121. Şekil).

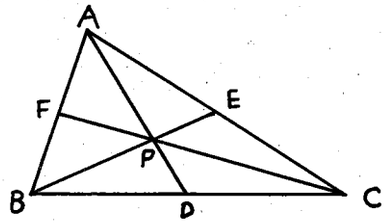


(6–121. Şekil)

Çözüm : $|AP|=4$ ve $|AP|=\frac{2}{3}.|AD|$ olduğundan $4=\frac{2}{3}.|AD|$ ve buradan $|AD|=6$ olur.

6–13. Alıştırmalar

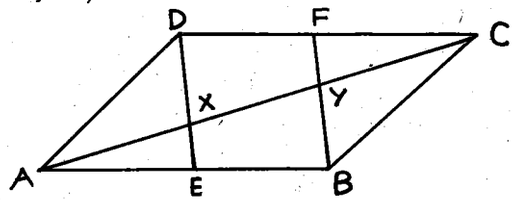
1. Bir $\widehat{ABC}$ üçgeninin kenarortayları P noktasında kesişsinler.



(6–122. Şekil)

$|FC|=18$, $|BE|=12$ ve $|AP|=6$ ise $|FP|$, $|PD|$, $|PE|$ yi hesaplayınız. (6–122. Şekil).

2. Bir paralelkenarda karşı iki köşeyi karşı iki kenarın ortalarını birleştiren doğruların bir köşegeni üç eş parçaya bölündüğünü ispatlayınız. (6–123. Şekil).



(6–123. Şekil)

3. Bir üçgende iki kenarın orta noktalarını birleştiren doğru parçasının üçüncü kenara paralel ve uzunluğunun üçüncü kenarın uzunluğunun yarısına eşit olduğunu ispatlayınız.

4. Bir yamukta paralel olmayan iki kenarın orta noktalarını birleştiren doğru parçasına **orta taban** denir.

Orta tabanın tabanlara paralel olduğunu ve uzunluğunun da alt ve üst tabanlar uzunlukları toplamının yarısına eşitliğini ispatlayınız.

5. Paralel olmayan kenarları eş olan yamuğa ikizkenar yamuk denir.

Bir ikizkenar yumukta taban açılarının birbirine eş olduklarını ispatlayınız.

6. Bir dikdörtgende köşegenlerin eşliğini gösteriniz.

7. Dört kenarı birbirine eş olan paralelkenara **eşkenar dörtgen** denir.

Bir eşkenar dörtgende köşegenler bulundukları köşedeki açıları ortalar ve birbirine diktirler. İspatlayınız.

8. Dört kenarı birbirine eş olan dikdörtgene **kare** denir. Karenin köşegenleri eşit ve hem de diktirler. Neden?

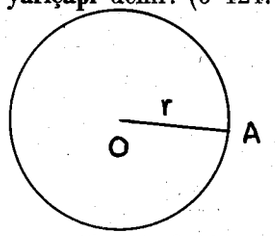
9. Aşağıda kenar sayısı verilen çokgenlerin açılarının ölçüleri toplamını bulunuz.

a) 10 b) 16 c) 22 d) 52

6–12. Üçgen Çizimleri

Bir üçgeni pergel ve cetvel yardımıyla çizmek demek verilen bilgiler yardımıyla üçgenin üç köşesini bulmak demektir. Üçgen çizimlerini yapabilmek için önce aynı özelikteki noktaların kümelerinden söz edeceğiz.

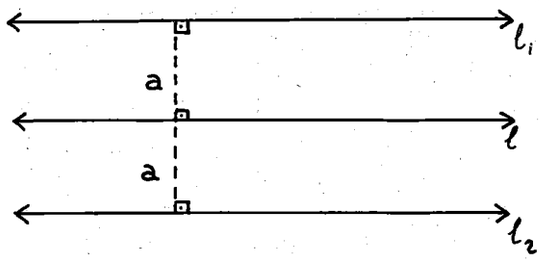
1– Verilen bir noktadan verilen bir uzaklıktaki noktaların kümesi düzlemde bir çemberdir. Verilen noktaya çemberin **merkezi** verilen uzaklığa da çemberin **yarıçapı** denir. (6–124. Şekil).



(6–124. Şekil)

Çember çizmek için pergel kullanılır. Merkezi O noktası olan çembere ait her A noktası için $|OA|=r$ dir.

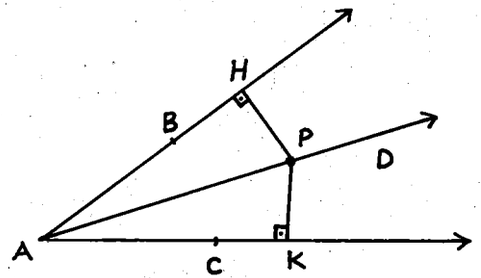
2– Düzlemde verilen bir doğrudan verilen bir uzaklıktaki noktaların kümesi verilen bir doğruya paralel olan bir çift doğrudur. (6–125. Şekil).



(6–125. Şekil)

Verilen l doğrusunda a uzaklıktaki doğrular l_1 ve l_2 dir.

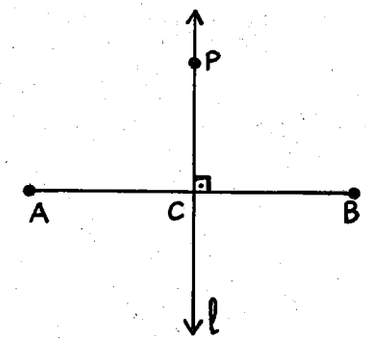
3– Bir açının açıortayı uç noktası hariç açının içinde kenarlardan eşit uzaklıkta bulunan bütün noktaların kümesidir. (6–126. Şekil).



(6–126. Şekil)

[AD ışını $\widehat{BAC}$ açısının açıortayıdır. A dan farklı P noktası, [AD üzerinde ise $|PH|=|PK|$ dır. $|PH|=|PK|$ ise P açıortayı üzerindedir. İspat için $\widehat{AHP}\cong\widehat{AKP}$ olduğu gösterilir.

4– Bir doğru parçasının uç noktalarından eşit uzaklıktaki bütün noktalar bu doğru parçasının orta dikmesi üzerindedir ve orta dikme üzerindeki noktalar da doğru parçasının uç noktalarından eşit uzaklıktadır.

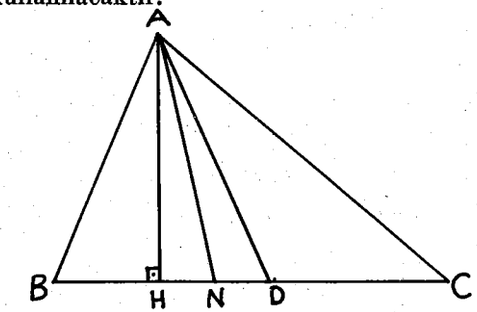


(6–127. Şekil)

(6–127. Şekil) de $|AC|=|CB|$ ve $l\perp[AB]$ dir. l doğrusunun her P noktası için $|PA|=|PB|$ dir. Eğer $|PA|=|PB|$ ise P noktası l doğrusu üzerindedir.

İspat için $\widehat{PAC}\cong\widehat{PBC}$ olduğunu gösteriniz.

Bir $\widehat{ABC}$ üçgeni çizelim. (6–128. Şekil) üzerinde üçgene ait elemanları gösterelim. Hem örneklerde hem de alıştırmalarda bu taslak üzerindeki harfler kullanılacaktır.



(6–128. Şekil)

$\|BC\|=a$	kenar
$\|AH\|=h_a$	yükseklik
$\|AN\|=n_A$	açıortay
$\|AD\|=v_a$	kenarortay

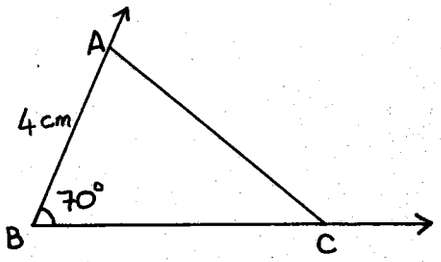
a , h_a , n_A , v_a ya benzer biçimde b , h_b , n_B , v_b , ve c , h_c , n_C , v_c de tanımlanabilir. Bir üçgende A , h_a , a verilmiştir, denildiğinde A nın ölçüsü derece olarak, h_a ve a nın uzunlukları da verilen birim cinsinden

alınacaktır. Şimdi örneklerle üçgen çizimlerini yapmağa çalışalım. Üçgenin köşelerini harflendirirken, A, B, C sırası saatin ters yönü (pozitif yön) dür.

6–26. Örnek

$a=5$, $m\widehat{B}=70$, $c=4$ verildiğine göre üçgeni çizelim.

Çizim : Önce $m\widehat{B}=70$ olacak biçimde iletki yardımıyla $\widehat{B}$ çizilir ve $\widehat{B}$ açısının kenarları üzerinde $a=5$, $c=4$ birim alınarak C ve A noktaları bulunur. A, B, C bulunduğuna göre üçgen çizilmiştir. (6–129. Şekil).

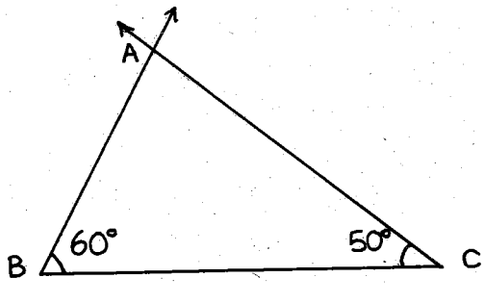


(6–129. Şekil)

6–27. Örnek

$m\widehat{B}=60$, $a=5$, $m\widehat{C}=50$ verildiğine göre üçgeni çizelim.

Çizim : Önce 5 cm. uzunluğunda [BC] alınır. [BC] kenarlarından biri olmak üzere B noktasından 60°, C noktasından 50° lik açılar alınarak A noktası bu açıların ortak olmayan kenarlarının kesim noktası olarak bulunur. Böylece $\widehat{ABC}$ çizilmiş olur. (6–130. Şekil).

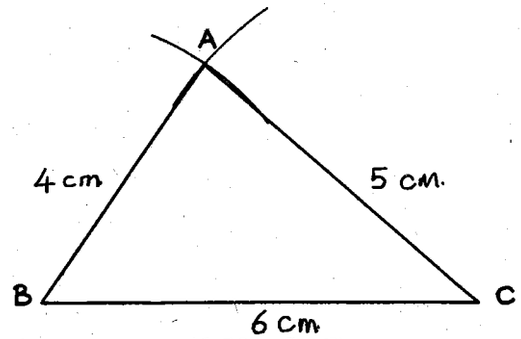


(6–130. Şekil)

6–28. Örnek

$a=6$, $b=5$, $c=4$ verildiğine göre üçgeni çizelim.

Çizim : Önce [BC] kenarı 6 cm. olarak alınır. B köşesinden 4 cm. C köşesinden 5 cm. uzaklıktaki noktaların kümesi çember olarak çizilir. İki çemberin kesim noktası A köşesidir. Böylece $\widehat{ABC}$ üçgeni çizilmiş olur. (6–131. Şekil).

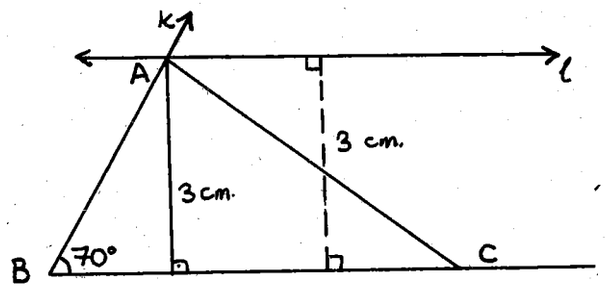


(6–131. Şekil)

6–29. Örnek

$a=6$ cm. , $m\widehat{B}=70$, $ha=3$ cm. verildiğine göre üçgeni çizelim.

Çizim : Şekilde görüldüğü gibi önce 6 cm. [BC] doğru parçası çizilir. B köşesinden 70 lik açı alınıp açının [Bx kenarının bulunduğu yarı düzlemde [BC] den 3 cm uzaklıkta olan ve [BC] ye paralel olan l doğrusu çizilir. l ile [Bx in kesim noktası A köşesidir. Böylece $\widehat{ABC}$ üçgeni çizilmiş olur. (6–132. Şekil).

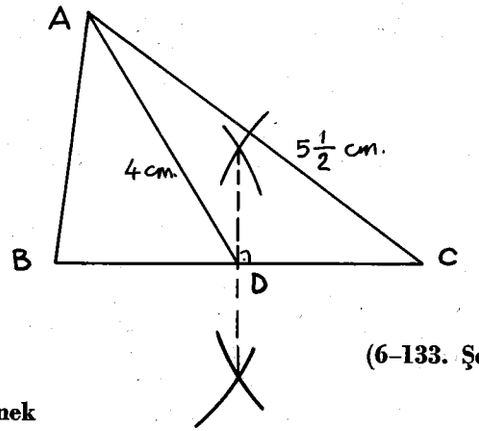


(6–132. Şekil)

6–30. Örnek

$a=5$ cm., $b=5\frac{1}{2}$ cm., $v_a=4$ cm. verildiğine göre üçgeni çizelim.

Çizim : Şekilde görüldüğü gibi $|BC|=5$ cm. olacak biçimde [BC] alınır. [BC] nin D orta noktası pergel ve cetvel yardımıyla bulunur. D den 4 cm. C den $5\frac{1}{2}$ cm. uzaklıkta nokta A noktasıdır. $\widehat{ABC}$ çizilmiş olur. (6–133. Şekil).

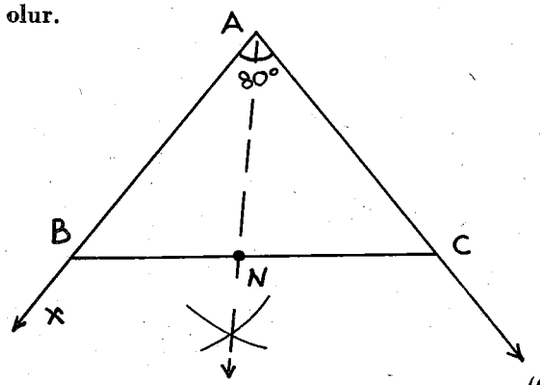


(6–133. Şekil)

6-31. Örnek

$m\widehat{A}=80$, $c=4$ cm., $n_A=3$ cm. verildiğine göre üçgeni çiziniz.

Çizim : İletki yardımıyla $\widehat{A}$ çizilir. Pergel ve cetvel yardımıyla $\widehat{A}$ açısının açıortayı çizilir. Açının [AX kenarı üzerinde $|AB|=4$ cm. açıortay üzerinde de $|AN|=5$ cm. alınır. B ile N birleştirilirse bu doğrunun $\widehat{A}$ açısının diğer kenarını kestiği nokta C köşesidir. $\widehat{ABC}$ çizilmiş olur.



(6–134. Şekil)

6–14. Alıştırmalar

1– Aşağıda verilen elemanlara göre $\widehat{ABC}$ üçgenlerini çiziniz.

a) $a=4$, $b=3\frac{1}{2}$, $c=4\frac{1}{2}$

b) $a=5$, $m\widehat{B}=60$, $m\widehat{C}=50$

c) $m\widehat{A}=55$, $b=4$, $c=3$

2– Aşağıda verilen elemanlara göre $\widehat{ABC}$ üçgenini çiziniz.

a) $a=4$, $b=5$, $h_b=3\frac{1}{2}$

b) $m\widehat{B}=60$, $a=4$ cm., $n_B=3$ cm.

c) $v_b=4$ cm., $b=5$ cm., $m\widehat{C}=65$

ALTINCI BÖLÜMLE İLGİLİ TESTLER

1. Aşağıdaki nokta kümelerinden hangisi bir ışındır?

(a) $\{x\,||x|=3\}$ (b) $\{x|x\geqslant 2\}$

(c) $\{x\,||x|\geqslant 1\}$ (d) $\{x|x<2\}$

(e) $\{x|-3\leqslant x\leqslant 3\}$

2– Aşağıdaki kümelerden hangisi konvekstir?

(a) Üçgen (b) Açı (c) Çember

(d) Işın (e) Hiçbiri

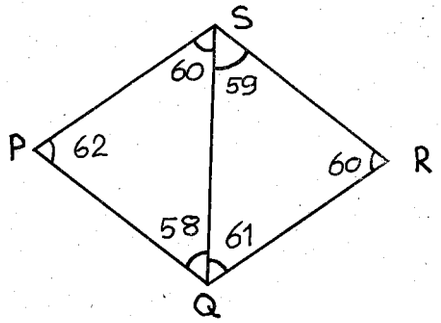
3– Bir açının ölçüsü bütünleyenin ölçüsünün 3 katı ise bu açının ölçüsü kaç derecedir?

(a) 45 (b) 60 (c) 75 (d) 105 (e) 135

4– Bir açının ölçüsü tümleyeninin ölçüsünün 5 katı ise bu açının ölçüsü kaç derecedir?

(a) 15 (b) 30 (c) 45 (d) 60 (e) 75

5– Aşağıdaki (6–135. Şekil) de açıların ölçüleri verilmiştir. Buna göre, uzunluğu en büyük olan doğru parçası aşağıdakilerden hangisidir?



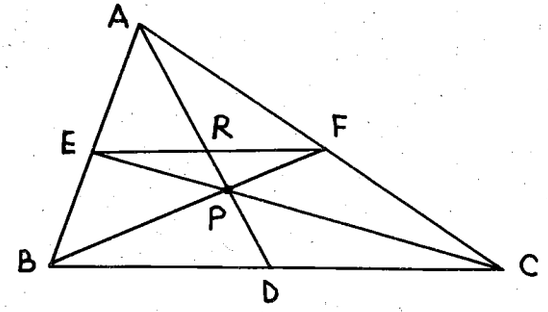
(6–135. Şekil)

(a) |QS| (b) |PQ| (c) |RQ| (d) |SR| (e) |PS|

6– Bir $\widehat{ABC}$ üçgeninde $|AB|=4$, $|AC|=6$ ise $|BC|$ için aşağıdaki eşitsizliklerden hangisi doğrudur?

(a) $|BC|<10$ (b) $|BC|>10$ (c) $|BC|>2$
(d) $|BC|>2$ (e) $2<|BC|<10$

7– (6–136. Şekil) deki $\widehat{ABC}$ üçgeninde [AD], [CE] ve [BF] kenarortaylar, $|AD|=12$ ise $|RP|$ kaçtır?



(6–136. Şekil)

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

8– Bir yamukta paralel olan kenar uzunlukları 6 ve 8 ise orta tabanın uzunluğu kaçtır?

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8 (e) 9

9. Aşağıdaki dörtgenlerden hangisinde köşegenler birbirine dik ve uzunlukları eşittir.

a) Dikdörtgen b) Paralelkenar c) Yamuk
d) Eşkenar dörtgen e) Kare

10. Çeşitkenar bir $\widehat{ABC}$ üçgeninde A köşesinden geçen yükseklik h_a, kenarortay v_a, açıortay n_A aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

a) $h_a<v_a<n_A$ b) $h_a<n_A<v_a$
c) $n_A<h_a<v_a$ d) $n_A<v_a<h_a$
e) $v_a<n_a<h_a$

YEDİNCİ BÖLÜM

POLİNOMLAR

Bu bölümde R'ye yeni bir x elemanı katarak elde edeceğimiz yeni kümeyi, bütün reel sayıları ve x elemanını içine alan bir halka oluşturacak biçimde genişleteceğiz. Bu halkanın elemanlarına "Polinom" diyeceğiz. Burada daha önceki bölümlerde gördüğünüz kavramların çeşitli kullanışlarını göreceksiniz. Böylece bilgileriniz daha da pekişecektir. Polinomlar üzerinde yapacağınız işlemler hesap becerikliliğinizi artıracaktır.

7–1. Polinomlar

a, b$\in$Z ve a$\neq$0 koşulu ile alınan ax=b denkleminin $\forall$ a, b$\in$Z için çözülebildiği en dar sistem Q cismidir.

Burada özel olarak 4x=3 denklemini ele alalım. Bu denklemin Q da çözümünün bulunduğunu biliyorsunuz. Acaba 4x=3 denkleminin çözüm kümesini içeren en dar sistem nedir? Böyle bir sistemi bulmağa çalışalım. Bu sisteme ilişkin küme A olsun.

I) $x=\frac{3}{4}\in A$ dır,

II) $x=\frac{3}{4}\notin Z$ olduğundan A sistemi Z den daha geniş olmalıdır.

$Z\subset A$ dır.

III) A kümesi çarpmaya göre kapalı olacaktır. O halde $\left(\frac{3}{4}\right)$ ün tüm kuvvetleri A nın bir elemanı olmalıdır.

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2\in A,\left(\frac{3}{4}\right)^3\in A,\ldots\left(\frac{3}{4}\right)^n=\underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}}_{n\text{ tane}}\in A$$

Ayrıca A kümesi Z yide kapsadığından $\frac{3}{4}$ ün kuvvetlerinin Z nin elemanları ile çarpımlarını da kapsamalıdır.

$a_0, a_1, \ldots a_n \in Z$ için

$a_0\,1\in A$, $a_1\left(\frac{3}{4}\right)\in A$, $a_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\in A$ ve $a_n\left(\frac{3}{4}\right)^n\in A$ olmalıdır.

IV) A kümesi toplamaya görede kapalı olması gerektiğinden, $a_0, a_1, \ldots a_n\in Z$ için

$$\left(a_0+a_1\left(\frac{3}{4}\right)+a_2\left(\frac{3}{4}\right)^2+\ldots+a_n\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\in A$$

olmalıdır. Bu elemanı $P\left(\frac{3}{4}\right)$ biçiminde gösterirsek $a_0, a_1, \ldots a_n\in Z$; $n\in N^+$ için)

$$P\left(\frac{3}{4}\right)=a_0+a_1\left(\frac{3}{4}\right)+a_2\left(\frac{3}{4}\right)^2+\ldots a_n\left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ dir.}$$

Elemanları $P\left(\frac{3}{4}\right)$ olan A kümesinin +,. işlemlerine göre bir halka oluşturduğunu gösterebilirsiniz.

4x—3=0 denkleminin çözümünü kapsayan en dar sistemin Z kümesi ile $\frac{3}{4}$ ü içeren bir halka olduğunu görüyorsunuz. Bu halkayı Z ye $\frac{3}{4}$ katmakla elde ettiğimizden bunu $Z_{\left[\frac{3}{4}\right]}$ halkası olarak gösteririz.

Sizde yukardakine benzer biçimde $Z_{\left[\frac{1}{2}\right]}$, $Z_{[\sqrt{2}]}$, $Q_{[\sqrt{3}]}$ halkalarını oluşturunuz.

$Z_{[x]}$ halkasında, elemanların $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n\in Z$, $n\in N$ olmak üzere, $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ biçiminde olacağına dikkat ediniz.

Şimdi de reel sayılar kümesine bu kümeye ait olmayan ve x sembolü ile gösterilen bir eleman katalım. Bu yeni x elemanı hiçbir koşula bağlı olmasın. (Yani $x=x^2$, $x=3x$ gibi bir koşul taşımasın.) Elde edilen küme $R\cup\{x\}$ kümesidir. Bu kümeyi içine alan birçok halka bulmamız mümkündür. Bu halkalara **R'nin genişletilmişi** denir. R'nin genişletilmişi olan bu halkalardan en darını $R_{[x]}$ ile gösterelim. $R_{[x]}$ halkasındaki $\oplus$ ve $\odot$ işlemleri R'nin elemanları için reel sayılardaki

bildiğimiz + ve . işlemlerinin aynı olsun. O halde $3 \oplus 5 = 8$ ve $3 \odot 5 = 15$ olacaktır. $R_{[x]}$ halkasındaki bu $\oplus$ ve $\odot$ işlemlerini kısaca + ve. biçiminde gösterelim. Reel sayılarda toplamaya göre birim eleman olan 0'ın $R_{[x]}$ halkasında da toplamaya göre birim eleman olacağını bulabiliriz. $R_{[x]}$ halkasının toplamaya göre birim elemanı e olsun. $R_{[x]}$ in elemanlarını P(x) biçiminde gösterelim.

Her $P(x) \in R_{[x]}$ için,

$P(x)+e=e+P(x)$ olmak zorundadır. Örneğin, $4 \in R_{[x]}$ dir.
O halde,

$$4+e=e+4=4$$

olmalıdır. Halbuki,

$$4+0=0+4=4$$

dür. (Neden?) Grupta birim elemanın tekliğinden $e=0$ dır. Benzer biçimde R'de çarpmaya göre birim eleman olan 1'in $R_{[x]}$ halkasında da çarpmaya göre birim eleman olduğunu gösterebilirsiniz.

$R_{[x]}$ in + ve . ya göre bir halka olmasından dolayı,

$$x.x,\ x.x.x,\ldots$$

elemanları R[x] e ait olacaktır. Bu elemanları kısaca,

$$x^2,\ x^3,\ldots$$

biçiminde gösterelim. $x^0=1$ olarak alacağız. O halde $x^0 \in R_{[x]}$ dır. Yine $R_{[x]}$ in "." işlemine göre kapalı olması nedeniyle $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ olmak üzere, a_1x, a_2x^2, $a_3x^3, \ldots$ elemanları da $R_{[x]}$ e aittir. $R_{[x]}$ halkası "+" işlemine göre de kapalıdır. O halde,

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ ve $n \in N$ için,

$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ de $R_{[x]}$ in elemanı olur.

7–1. Tanım

$R_{[x]}$ halkasının her elemanı, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$ ve $n \in N$ olmak üzere, $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$
biçimindedir. Bu elemanlara x'in reel katsayılı polinomları denir. 0 reel sayısına **sıfır polinomu** ve sıfır hariç her reel sayıya da **sabit polinom** denir.

Bu tanımla $R_{[x]}$ in elemanlarına polinom dediğimizde $R_{[x]}$ halkasına da polinomlar halkası diyebiliriz. Sözgelimi,

$$3—7x,\ -\frac{1}{2},\ 0,\sqrt{7},\ \pi,\ 5—2x+3x^2,\ \ldots$$

birer polinomdurlar. Bunlardan hangilerinin sabit polinom olduğunu bulunuz. $R_{[x]}$ in + ve . işlemlerine göre bir halka ve $0 \in R$ de + ya göre bu halkada birim eleman olduğundan her $P(x) \in R_{[x]}$ için $0 \cdot P(x)=P(x) \cdot 0=0$ dır. O halde örneğin, $0 \cdot x=x \cdot 0=0$ dır.

$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ polinomu x'in çoğalan kuvvetlerine göre yazılmıştır. $R_{[x]}$ in + ya göre kapalı olması ve + işleminin değişme, birleşme özelikleri sonucu bu elamanı x'in azalan kuvvetlerine göre,

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

biçiminde de yazabiliriz. Sözgelimi,

$$P(x)=—2+\frac{5}{3}x+7x^2+x^3 \text{ polinomunu}$$

$$P(x)=x^3+7x^2+\frac{5}{3}x—2$$

bişiminde de yazabiliriz.

7–2. Tanım

Bir $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ polinomunu oluşturan a_0, a_1x, $a_2x^2, \ldots, a_nx^n$ polinomlarına P(x) in terimleri denir. Herhangibir a_kx^k teriminde a_k ya bu terimin katsayısı ve x'in üzerindeki $k \in N$'ye de bu terimin derecesi denir. P(x) i oluşturan terimler içerisinde derecesi en büyük olan terimin katsayısına P(x) polinomunun baş katsayısı ve bu terimin derecesine de P(x) in derecesi denir. Sabit polinomun derecesi sıfırdır. Sıfır polinomunun derecesi yoktur.

7–1. Örnek

1) $P(x)=—8+3x+5x^3$ polinomunda birinci terim —8 sabit polinomudur. Bunun derecesi 0 ve katsayısı —8 dir. 3x in derecesi 1, katsayısı 3 tür. $5x^3$ ün ise derecesi 3, katsayısı da 5 tir. P(x) polinomunda en yüksek dereceli terim $5x^3$ olduğu için P(x) in derecesi 3 ve baş katsayısı da 5 tir.

2) $P(x)=\frac{1}{3}x^4—7x+12$ polinomunun derecesi 4, baş katsayısı da $\frac{1}{3}$ tür. Bu polinomda üçüncü ve ikinci dereceden terimlerin katsayıları sıfırdır. Aslında,

$P(x)=\frac{1}{3}x^4+0x^3+0x^2-7x+12$ biçimindedir. Bir P(x) polinomunun derecesini d(P(x)) biçiminde yazacağız. O halde burada d(P(x))=4 tür.

3) $a_0=a_1=a_2=\ldots\ a_n=0$ için P(x), sıfır polinomu olur.

İki polinomun toplamı yine bir polinom olacaktır. (Neden?) $R_{[x]}$ halkasının + ya göre kapalı olması gerektiğini hatırlayınız. O halde her P(x), $Q(x)\in R_{[x]}$ için, P(x)+Q(x) de bir polinomdur.

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots a_nx^n$$

ve,

$$Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n$$

ise,

$$P(x)+Q(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\ldots+(a_n+b_n)x^n$$

olur. Sözgelimi,

$$(3-5x+7x^3)+(1+6x-3x^2)=(3+1)+(-5+6)x-3x^2+7x^3$$
$$=4+1x-3x^2+7x^3$$
$$=4+x-3x^2+7x^3$$

dür. Burada P(x) ile Q(x) in dereceleri ile bunların toplamı olan (Px)+Q(x) polinomunun dereceleri arasında ne ilişki görüyorsunuz? Örnekler üzerinde çalışarak, P(x)+Q(x) in derecesinin P(x) ile Q(x) in derecelerinden en büyüğüne eşit veya küçük olabileceğini görünüz.

$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ polinomunun toplamaya göre tersi $-P(x)=-(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)$ dir. Halka özeliklerinden dolayı, $-P(x)=-1\ .\ P(x)=-1(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)=-a_0-a_1x-\ldots-a_nx^n$ olduğunu gösterebilirsiniz. Örneğin, $P(x)=9-6x+2x^3$ ün toplamaya göre tersi $-P(x)=-9+6x-2x^3$ tür. Şimdi $R_{[x]}$ de,

$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ ve $Q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m$ polinomlarının eşit olmasından ne anlamamız gerektiğini araştıralım. $m\geqslant n$ olsun. ($m<n$ için de ispat aynıdır.) Bu şart altında,

$$P(x)=Q(x)$$

yani, $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots a_nx^n=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n+\ldots+b_mx^m$ olduğunu kabul edelim. Eşitliğin her iki tarafına $-Q(x)$ i ekleyip toplamanın birleşme, sadeleşme, değişme ve çarpmanın dağılma özeliğinden yararlanarak bunu,

$$(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\ldots+(a_n-b_n)x^n-b_{n+1}x^{n+1}-\ldots$$
$$-b_mx^m=0$$

biçimine getirebiliriz. Burada, eşitliğin sol tarafındaki polinomun sıfır polinomu olduğu görülüyor. Sıfır polinomunun özeliğinden dolayı,

$$a_0-b_0=0,\ a_1-b_1=0,\ a_2-b_2=0,\ a_3-b_3=0,\ \ldots,\ a_n-b_n=0,$$
$$b_{n+1}=0,\ \ldots,\ b_m=0$$

ve buradan,

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \ldots,\ a_n=b_n$$

elde edilir. Karşıt olarak ta,

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \ldots,\ a_n=b_n$$

ise P(x)=Q(x) olduğu gösterilir. **O halde iki polinomun eşit olması için gerek ve yeter koşul derecelerinin eşit ve aynı dereceli terimlerinin katsayılarının eşit olmasıdır.**

7-2. Örnek

1) $P(x)=-\frac{1}{2}+\sqrt{3}x+4x^2-x^3$ ise,

$$-P(x)=\frac{1}{2}-\sqrt{3}x-4x^2+x^3 \text{ olur.}$$

2) $5-7x+4x^3=m+(n+1)x+kx^2+2tx^3$ ise aynı dereceli terimlerin katsayıları eşit olacağı için,

$m=5,\ n+1=-7,\ k=0,\ 2t=4$ yani,

$m=5,\ n=-8,\ k=0,\ t=2$ dir.

3) $x^3+3x^2-8x+7+P(x)=8x^2-4x+5$ eşitliğini sağlayan bir $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$ polinomunu bulalım.

Verilen eşitlikten,

$$x^3+3x^2-8x+7+(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=8x^2-4x+5$$

ve buradan,

$$(1+a_3)x^3+(3+a_2)x^2+(-8+a_1)x+(7+a_0)=8x^2-4x+5$$

olur.

Polinomlarda eşitlik tanımından,

$$1+a_3=0,\ 3+a_2=8,\ -8+a_1=-4,\ 7+a_0=5$$

yani,

$$a_3=-1,\ a_2=5,\ a_1=4,\ a_0=-2$$

dir. Böylece,

$$P(x)=-x^3+5x^2+4x-2 \text{ olur.}$$

$P(x),\ Q(x)\in R_{[x]}$ olsun. Çıkarma işlemi sayılarda olduğu gibi,

$$P(x)-Q(x)=P(x)+[-Q(x)]$$

biçiminde tanımlanır. $R_{[x]}$ halkası çıkarmaya göre kapalıdır. (Neden?) Şimdi çıkarma ile ilgili bir örnek verelim.

$$P(x)=8-2x^2+5x^4$$

$$Q(x)=13-7x+4x^2-9x^5$$

olsun.

$$\begin{aligned}P(x)-Q(x)&=(8-2x^2+5x^4)-(13-7x+4x^2-9x^5)\\&=(8-2x^2+5x^4)+(-13+7x-4x^2+9x^5)\\&=-5+7x-6x^2+5x^4+9x^5\end{aligned}$$

olur.

$R_{[x]}$ in toplama ve çarpmaya göre bir halka olduğunu biliyorsunuz. $R_{[x]}$ te toplama ve bununla ilgili olarak çıkarma işlemlerinin nasıl yapıldığını da gördünüz. Şimdi de çarpma işlemini yapalım. (Px), $Q(x)\in R_{[x]}$ olsun. $R_{[x]}$ halkası çarpmaya göre de kapalıdır. O halde, $P(x).\ Q(x)\in R_{[x]}$ yani çarpım da bir polinomdur. Çarpma işlemini örnekler üzerinde izleyelim.

7-3. Örnek

1) $P(x)=6,\ Q(x)=3-2x+9x^2$ olsun. $R_{[x]}$ te çarpmanın toplama üzerinde dağılma özeliği vardır. (Neden?)

O halde,

$$\begin{aligned}P(x).\ Q(x)&=6.(3-2x+9x^2)\\&=18-12x+54x^2\end{aligned}$$

dir.

2) $P(x)=-2x;\ Q(x)=-2+5x^2+7x^3$ olsun. Çarpmanın dağılma ve değişme özeliklerinden,

$$\begin{aligned}P(x).\ Q(x)&=-2x.\ (-2+5x^2+7x^3)\\&=4x-10x^3-14x^4\end{aligned}$$

bulunur.

3) $P(x)=11-3x+5x^2,\ Q(x)=-2+3x-7x^3$ olsun. $R_{[x]}$ halkasında + ve . nın özeliklerinden,

$$\begin{aligned}P(x)\ .\ Q(x)&=(11-3x+5x^2)\ .\ (-2+3x-7x^3)\\&=11(-2+3x-7x^2)-3x(-2+3x-7x^3)+5x^2(-2+3x-7x^3)\\&=-22+33x-77x^2+6x-9x^2+21x^4-10x^2+15x^3-35x^5\\&=-22+(33+6)x+(-9-10)x^2+(-77+15)x^3+21x^4-35x^5\\&=-22+39x-19x^2-62x^3+21x^4-35x^5\end{aligned}$$

elde edilir.

Bu örneklerden çarpımın derecesinin çarpanların derecesi toplamına eşit olduğunu yani, $d(P(x).\ Q(x))=d(P(x))+d(Q(x))$ olduğunu izleyiniz. P(x) ve Q(x) ten en az birinin sıfır polinom olması halinde bu eşitliği yazamıyacağımıza da dikkat ediniz. Sayılarda olduğu gibi polinomları da alt alta yazarak toplar, çıkarır ve çarpabiliriz. Bunu aşağıdaki örneklerde izleyiniz.

$$\begin{array}{r} -9x^2+3x-7 \\ +\ \ 5x^2-\ x+2 \\ \hline -4x^2+2x-5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6x^3-4x^2+3x-1 \\ -\ \ \mp 7x^2\pm 5x\pm 2 \\ \hline 6x^3-11x^2+8x+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7x^2-3x+2 \\ \times\ \ x^2+5x-3 \\ \hline -21x^2+9x-6 \\ 35x^3-15x^2+10x \\ +\ \ 7x^4-3x^3+2x^2 \\ \hline 7x^4+32x^3-34x^2+19x-6 \end{array}$$

Tamsayılar halkası ile polinomlar halkası arasında büyük bir benzerlik olduğunu söylemiştik. Tamsayılar kümesinin bölme işlemine göre kapalı olmadığını biliyorsunuz. $a>b$ olmak üzere a ve b tamsayılarını alalım. Eğer a, tam olarak b'ye bölünmüyorsa $r<b$ olmak üzere, $a=bc+r$ olacak biçimde c ve r tamsayıları bulunabilir. Örneğin, $17=3.5+2$ dir.

Şimdi benzer yoldan polinomlar halkasında bölme işlemini inceliyelim.

$P(x)$ ve $Q(x) \in R_{[x]}$ olsun. $d(P(x)) > d(Q(x))$ olduğunu varsayalım. Eğer,

$$P(x)=Q(x) \cdot T(x)$$

eşitliğini sağlayan bir $T(x)$ polinomu varsa $P(x)$ polinomu $Q(x)$ polinomuna bölünüyor deriz. (Burada, $d(P(x))=d(Q(x))+d(T(x))$ olacağını hatırlayınız.) $P(x)=Q(x) \cdot (Tx)$ eşitliğinde $Q(x)$ ile $T(x)$ e, $P(x)$ in çarpanları denir. Söz gelimi.

$$x^3-8=(x-2)\ (x^2+2x+4)$$

olduğu için x^3-8 polinomu $x-2$ ile ya da x^2+2x+4 ile bölünebilir. Bu eşitlikte çarpımın derecesinin çarpanların dereceleri toplamına eşit olduğunu da görünüz.

Tamsayılarda olduğu gibi polinomlar halkasında bölme işlemi her zaman yapılamaz, yani $R_{[x]}$ halkası bölmeye göre kapalı değildir. Sözgelimi, $P(x)=x$ polinomu, $Q(x)=x^2+1$ ile bölünemez. Çünkü,

$$x=(x^2+1) \cdot T(x)$$

eşitliğini sağlayan bir $T(x) \in R_{[x]}$ yoktur. (Sol taraftaki polinomun derecesi 1 olduğu halde sağ tarafın derecesinin, $T(x)$ in derecesi ne olursa olsun 1 olamayacağını görünüz.) Bu örnekle polinomlar halkasının bölmeye göre kapalı olmadığını görmüş oluyoruz. $P(x)$ polinomunun derecesi $Q(x)$ in derecesinden büyük olduğu halde $Q(x)$ polinomuna bölünemiyorsa,

$$P(x)=Q(x) \cdot T(x)+K(x)$$

olacak biçimde $T(x)$ ve $K(x)$ polinomları bulunabilir. Burada, $P(x)$ polinomuna **bölünen**, $Q(x)$ e **bölen**, (Tx) e **bölüm** ve $K(x)$ e de **kalan** denir. Böyle $Q(x)$ ve $T(x)$ polinomlarının bir tek olacağını ve $K(x)$ in derecesinin $Q(x)$ in derecesinden küçük olacağını sezginize bırakıyoruz. Bölme işleminin nasıl yapılacağını da örnekler üzerinde vereceğiz.

7–4. Örnek

1) $P(x)=2x^2+x-5$ polinomunu $Q(x)=x-3$ polinomuna bölelim. Yani $P(x)=Q(x) \cdot T(x)+K(x)$ koşulunu sağlayan $T(x)$ ve $K(x)$ polinomlarını arayalım.

$$2x^2+x-5=(x-3) \cdot T(x)+K(x)$$

eşitliğini yazalım. Önce, $\frac{2x^2}{x}=2x$ elde edip,

$$P(x)=(x-3).2x+K_1(x)$$

yazar ve buradan,

$$K_1(x)=2x^2+x-5-(x-3) \cdot 2x=7x-5$$

elde edilir. $K_1(x)$ in derecesi 1 dir. $Q(x)$ inki de 1 olduğundan $K(x)$ polinomu $Q(x)$ ile bölünür. O halde aynı süreci devam ettirerek,

$$K_1(x)=Q(x).T_1(x)+K_2(x)$$

$$7x-5=(x-3)7+K_2(x)$$

yazar ve buradan,

$$K_2(x)=16$$

buluruz. $K_2(x)$ in derecesi $Q(x)$ inkinden küçük olduğundan ($K(x)$ in derecesinin sıfır olduğunu görünüz) bölme işlemine artık devam edilemez.

Böylece, $K_1(x)=(x-3)(7)+16$ dır. Bunu,

$P(x)=(x-3)(2x)=K_1(x)$ te yerine koyup,

$$2x^2+x-5=(x-3)(2x+7)+16$$

elde edilir. O halde,

$T(x)=2x+7$ ve $K(x)=K_2(x)=16$ dır.

2) $P(x)=3x^3+2x^2-x+1$, $Q(x)=2x^2+x+1$ olsun. $P(x)$ i $Q(x)$ e bölelim.

Bölme tanımına göre,

$$3x^3+2x^2-x+1=(2x^2+x+1).T(x)+K(x)$$

şartını sağlayan $T(x)$ ve $K(x)$ polinomlarını bulacağız.

$Q(x)$ in derecesi 2 dir. $T(x)$ in derecesi 1 olmalıdır. (Neden?) Yukarıda izlediğimiz yolla $T(x)$ polinomunun en yüksek dereceli teriminin $\frac{3x^3}{2x^2}=\frac{3}{2}x$ olacağını buluruz. O halde,

$$3x^3+2x^2-x+1=(2x^2+x+1).\frac{3}{2}x+K_1(x)$$

yazılabilir.

Buradan,

$$K_1(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+1$$

bulunur. Görülüyor ki $K_1(x)$ in derecesi 2 dir. Bölümü bir defa daha tekrarlamalıyız.

$$K_1(x)=Q(x).T_1(x)+K_2(x)$$

şartından,

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+1\,x+1=(2x^2+x+1).\frac{1}{4}+K_2(x)$$

olmalıdır. Buradan da,

$$K(x)=-\frac{11}{4}x+\frac{3}{4}$$

bulunur. O halde,

$$3x^3+2x^2-x+1=(2x^2+x+1)\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{11}{4}x+\frac{3}{4}\right)$$

olup,

$$T(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\ \text{ ve }\ K(x)=-\frac{11}{4}x+\frac{3}{4}\ \text{ tür.}$$

Pratikte polinomların birbirine bölümü aşağıdaki sıraya göre yapılır:

1. Bölünen ve bölen polinomların her ikisi de x'in azalan kuvvetlerine göre sıralanır.

2. Bölünenin soldan ilk terimi bölenin soldan ilk terimine bölünür.

3. Bulunan bu bölüm, bölenin her terimi ile çarpılarak, aynı kuvvetleri alt alta gelecek biçimde bölünenin altına yazılır.

4. Bu çarpım bölünenden çıkarılır ve geri kalanlardan uygun sayıda terim bu farkın yanına indirilir.

5. Bu yeni polinom için yukarıdaki 2 – 3 – 4 ncü maddelerdeki işlemler aynı biçimde uygulanır.

6. Bu işleme kalanın derecesi bölenin derecesinden az oluncaya kadar devam edilir.

Şimdi burada söylenenleri aşağıdaki bölme üzerinde adım adım izleyiniz.

$$\begin{array}{r|l}
3x^5+3x^4+2x+1 & x^3+4x^2+x+1 \\
\mp 3x^5\mp 12x^4\mp 3x^3\mp 3x^2 & \hline 3x^2-9x+33 \\
\hline
-9x^4-3x^3-3x^2+2x & \\
\pm 9x^4\pm 36x^3\pm 9x^2\pm 9x & \\
\hline
33x^3+6x^2+11x+1 & \\
\pm 33x^3\mp 132x^2\mp 33x\mp 33 & \\
\hline
-126x^2-22x-32 &
\end{array}$$

Şimdi bir P(x) polinomunu (x—a) ile bölelim. Bölüm Q(x) ve kalan da K olsun.

$$P(x)=(x-a)\ Q(x)+K$$

yazabiliriz. Burada, x yerine a yazarak, P(a)=(a—a) Q(a)+K'dan P(a)=K olur. **O halde bir P(x) polinomunu "x–a" ya böldüğümüzde "K" kalanını bulmak için P(a) yı bulmamız yeter.** Örneğin,

$$P(x)=x^3-4x^2+7x-11$$

polinomunun x—2 ile bölümünden elde olunan kalan,

$$P(2)=8-16+14-11=-5\ \text{ dir.}$$

P(a)=0 olursa kalan 0 olacaktır. Bu durumda P(x) polinomu x—a ile bölünüyor demektir.

$R_{[x]}$ halkasına, yeniden tanımsız ve belirsiz ve $R_{[x]}$ in elemanı olmayan, y sembolü ile göstereceğimiz bir başka eleman katalım. $R_{[x]}\cup\{y\}$ yi içine alan yani $R_{[x]}$ den daha geniş bir $R_{[x,y]}$ halkası elde edebiliriz. Örneğin,

$$x^3y^4+2x^2y-7,\ 4x7y-8x^2y^5-2x+y-3$$

polinomları $R_{[x,y]}$ nin birer elemanıdırlar. Bu tür polinomlarda terimlerin her birinin derecesi x ve y nin dereceleri toplamına eşittir. Söz gelimi, $P(x,y)=-7x^2y^4+2x^3y^3-4x^2y^5$ polinomundan birinci terimin derecesi 2+4=6, ikinci terimin derecesi 3+3=6 ve üçüncü terimin derecesi de 2+5=7 dir. $R_{[x,y]}$ halkasında da bir polinomun derecesi en yüksek dereceli terimin derecesidir. O halde yukarıdaki P(x,y) polinomunun derecesi 7 dir. Bunu da d(P(x,y))=7 biçiminde yazarız. $R_{[x,y]}$ halkasınada tanımsız yeni elemanlar katarak daha geniş halkalar elde edebiliriz.

Genel olarak bir polinomu yazarken a, b, c, ... sembollerini reel sayılar, x, y, z, t, u, v, sembollerini de belirsiz ve tanımsız elemanlar olarak düşüneceğiz. Bir polinomun ifadesindeki a, b, c sembollerine parametre denir. Örneğin, $8a^4xy^3z^2$ tek terimli polinomunun derecesi 1+3+2=6 olup, katsayısı $8a^4$ dür. Burada a sayısı bir **parametredir.**

P(x) polinomunda x'i R'nin dışında tanımsız ve belirsiz almıştık. Eğer x reel sayı varsayılırsa P(x) polinomu da reel sayılardan reel sayılara bir fonksiyon olur. Sözgelimi, $P(x)=3x^4-5x^2+2$ polinomunda $x\in R$ olsun. Bu takdirde,

$x=1$ için $P(1)=3.1-5.1+2=0$

$x=-2$ için $P(-2)=3(-2)^4-5(-2)^2+2$

$=48-20+2=30$

$x=0$ için $P(0)=3.0-5.0+2=2$

olur. Bu örneklerden x in reel sayısı olması halinde $P(x)\in R$ olacağını görüyoruz.

O halde $x\in R$ için $P : R\to R$ dir. x'i belli bir reel sayı olarak alırsak P(x) polinomları reel sayılara dönüşür. Böylece $R_{[x]}$ halkası da R cismi olur.

7-1. Alıştırmalar

1) Aşağıdaki polinomların derecelerini bulunuz.

a) $-x$

b) $\sqrt{3}$

c) 0

d) $-5x^4-3x^3+2x-7$

e) $3x^2y-x3^3y^5+xy-y^7$

f) $\frac{2}{3}-\sqrt{5}x+\sqrt{2}x^2$

2) $P(x)=-3+x^2-5x^3$

$Q(x)=2-x+4x^3+x^4$ olduğuna göre aşağıdakileri bulunuz.

a) $P(x)+Q(x)$

b) $Q(x)-P(x)$

c) $P(x)-2Q(x)$

d) $5P(x)+3Q(x)$

e) $xP(x)-x^2Q(x)$

f) $-2x^3P(x)+xQ(x)$

3) Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) $(3x-1)(-2x^3+4x+5)$

b) $(4x^2-3x)^2$

c) $\left(\frac{2}{5}x\right)(-3x^2y^3)(5xy^2)$

d) $(\sqrt{2}x^3)^2$

e) $(3x)^3.(-3x^2)$

f) $(-4x^2+y+1)-(3x^2+2)^0$

g) $(|a|.x)^4.(-ax^2)$

h) $(\sqrt{3}x-\sqrt{2}y)\ (\sqrt{3}x+\sqrt{2}y)$

i) $(x^m-y^n)(x^m+y^n)$

4) Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) $m-(-m+2)$

b) $(2x-y+z)-(x+3y-z)-(-x-y+z)$

c) $-[3x-2(x-y)+(-2x+y)]+[(-x\ 3y)-8]$

d) $\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y-\left(\frac{3}{2}y+\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{5}{6}-x+2\right)$

e) $-(-2xy^2+x)-[(3x-2y)-4y(x-5)]$

5) $A=-x^2y-2x+3$

$B=4x-7y+3x^2y+y^2$

$C=6x^2-4y-2$

olduğuna göre, aşağıdakileri hesaplayınız.

a) $A+(B-C)$

b) $B-(A+C)$

c) $2xA+5B-3yC$

6) Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) $(4x-3)^2$

b) $(x^2-7x+1)^2$

c) $\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y\right)^2$

d) $(2x+5)^3$

e) $\left(x+\frac{y}{2}\right)^3-\left(x-\frac{y}{2}\right)^3$

7) $P(x)=3-2x+5x^2-2x^3$ olduğuna göre aşağıdakileri hesaplayınız

a) $P(-1)$ e) $P(1+\sqrt{2})$

b) $P(3)$ f) $P(2a)$

c) $P(0)$ g) $P\left(-\frac{2}{3}\right)$

d) $P(\sqrt{2})$ h) $P(5b)$

8) $P(x)=3x^2-8x-2$ olduğuna göre aşağıdakileri hesaplayınız.

a) $P(2x)$ e) $P(x+1)$

b) $P(-x)$ f) $P(x^2)$

c) $P(\sqrt{3}-x)$ g) $P(-x^2+1)$

d) $P(-2x-3)$ h) $P(x^2-x+3)$

9) $P(x,y)=2x^2y-5xy+3y$ olduğuna göre aşağıdakileri hesaplayınız.

a) $P(1, 2)$ e) $P(y, x)$

b) $P(-1, 3)$ f) $P(-y, -x)$

c) $P(4, 0)$ g) $P(0, 0)$

d) $P(-x, 2y)$ h) $P(2y, 3)$

10) Aşağıdaki eşitliklerde $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarını bulunuz.

a) $5x^3-3x^2+2+P(x)=x^3-2x^2+3x$

b) $-7x^3-5x-4=xQ(x)-10x^3+x^2-4$

11) Aşağıdaki bölme işlemlerini yapınız.

a) $(-18x^4) : \frac{2}{3}x^2$

b) $5a^2x^3y^2 : 3a^3x^2y^2$

c) $(6x^4y^5-15x^2y^4-21x^3y^2) : -3x^2y$

d) $(x^3-y^3) : (x-y)$

e) $(5x^3-12x^2+8x+11) : (x-3)$

f) $(6x^4+8x^3-11x^2+8x-4) : (3x-2)$

g) $(5x^4-7x^3-x^2+28x-12) : (x^2-4)$

h) $\left(\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{36}xy-\frac{1}{3}y^2\right) : \left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y\right)$

12) $P(x)=x^3-4x^2+5x-6$ nın $x-3$ ile bölünmesinden elde olunan kalanı bölme işlemini yapmadan bulunuz.

13) $P(x)=x^3-4x^2+mx-6$ nın $2x-1$ ile bölünebilmesi için m ne olmalıdır?

14) Bir $P(x)$ polinomunun $x-1$ ile bölümünden elde edilen kalan 3, $x+1$ ile bölümünden elde edilen kalan -1 dir. Bu polinomun $(x-1)(x+1)$ çarpımına bölümünden elde edilecek kalanı bulunuz.

Yol : Kalanın en çok birinci dereceden $ax+b$ gibi bir polinom olacağını tasarlayarak,

$$P(x)=(x-1)(x+1).Q(x)+ax+b$$

eşitliğinden yararlanınız.

15) Bir $P(x)$ polinomunun $x-1$ ile bölümünde kalan 1, $x-2$ ile bölümünde kalan 3 oluyor. Bu polinomun $(x-1)(x-2)$ çarpımına bölümünden elde edilecek kalanı bulunuz.

7-2. Çarpanlara Ayırma

$R_{[x]}$ in reel katsayılı polinomların kümesi olduğunu biliyorsunuz. Katsayıları, rasyonel olan polinomların kümesini de $Q_{[x]}$, biçiminde gösterebiliriz. $R_{[x]}$ halkası ile tam sayılar halkası arasında çok yakın bir benzerlik vardır. Her iki küme de toplama ve çarpma işlemlerine göre kapalıdır. Bazı tamsayılar örneğin, 15 sayısı iki tamsayının çarpımı olarak $15=3.5$ biçiminde yazılabilir. Burada 3 ve 5 sayılarına 15 in çarpanları denildiğini biliyorsunuz. Öte yandan 7 tamsayısı ancak $7=1.7$ biçiminde yazılabilir. 7 nin 1 den ve 7 den başka çarpanı olmadığı için 7 sayısına asal sayı denildiğini de biliyorsunuz. Benzer biçimde $R_{[x]}$ halkasında bazı polinomlar, derecesi kendisinden küçük iki polinomun çarpımı biçiminde yazılabilir.

Söz gelimi,

$$x^2-4=(x-2)(x+2)$$
$$2x^4-6x^3-10x=2x(x^3-3x^2-5)$$

biçimlerinde yazılabilir. Çarpma işlemlerini yaparak eşitliklerin doğruluğunu görünüz. Bazı polinomlar ise çarpanlara ayrılamazlar. Örneğin, x^2+1 polinomu a, b, c, $d\in R$ ve $ac\neq 0$ (yani $a\neq 0$ ve $c\neq 0$) olmak üzere, $(ax+b)(cx+d)$ biçiminde yazılamaz. Çünkü böyle yazmak mümkün olsaydı,

$$x^2+1=(ax+b)(cx+d)$$

buradan,

$$x^2+1=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

olurdu. Eşit polinomlarda dereceleri aynı olan terimlerin katsayıları eşit olacağı için,

$$ac=1\ ,\ ad+bc=0\ ,\ bd=1$$

olması gerekirdi. Bunlardan ikinci eşitliğin karesini alarak,

$$(ad+bc)^2=a^2d^2+b^2c^2+2(ac)(bd)=a^2d^2+b^2c^2+2=0$$

elde ederdik. Halbuki, $a^2d^2+b^2c^2\geqslant 0$ dır. O halde son eşitlik mümkün değildir, (Olmayana ergi yöntemi).

7–3. Tanım

Sabit olmayan iki veya daha fazla polinomun çarpımı biçiminde yazılamayan polinomlara, **indirgenemeyen polinomlar**, baş katsayısı 1 olan ve indirgenemeyen polinomlara da, **asal polinom** denir.

Bu tanım gereğince, x^2-4 , x^3+1 , $(x+1)^2$, $3x^2-2x$ polinomlarından her biri $Q_{[x]}$ ve $R_{[x]}$ te indirgenebilen polinomlardır. x^2-3 polinomu ise $Q_{[x]}$ te indirgenemez, fakat $R_{[x]}$ te ise, $(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ biçiminde indirgenebilir. Öte yandan örneğin, x^2+3 , $2x^2+1$, $x-1$ polinomları ise $R_{[x]}$ te indirgenemezler. Bunlardan baş katsayısı 1 olan x^2+3 ile $x-1$ polinomları $R_{[x]}$ te asaldırlar. Polinomları çarpanlara ayırma yöntemlerini örnekler üzerinde vermeye çalışacağız.

I. Dağılma özeliğinden yararlanarak çarpanlara ayırma.

7–5. Örnek

a) $ax+ay=a(+y)$

b) $2x(x-1)+(x-1)=(x-1)(2x+1)$

c) $y(2y+x)-3(2y+x)=(2y+x)(y-3)$

d) $5x(x^2-y)-3y(y-x^2)=5x(x^2-y)+3y(x^2-y)$
$=(x^2-y)(5x+3y)$

e) $x^2-ax+bx-ab=x(x-a)+b(x-a)=(x-a)(x+b)$

f) $ax^2+bx^2+2a+2b=x^2(a+b)+2(a+b)=(a+b)(x^2+2)$

g) $ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)=abx^2+aby^2+a^2xy+b^2xy$
$=ax(bx+ay)+by(bx+ay)=(bx+ay)(ax+by)$

7–2. Alıştırmalar

Aşağıdakileri çarpanlara ayırınız.

1) $2x^2(x+5)-(x+5)$
2) $3y^2(x-5)+y(5-x)$
3) $2x(x-3y)+2y(x-3y)-3x+9y$
4) $-2a(2x-2y+3z)-2x+4y-6z$
5) $5x(a-2b)-2y(2b-a)-(-2b+a)$
6) $ax-cx-ay+cy$
7) m^3-m^2+m-1
8) $at-bt+bx+cx-ct-ax$
9) $y(1+x^2)-x(1+y^2)$
10) $(mn+xy)^2+(xn-ym)^2$

II. Bazı özel eşitliklerden yararlanarak çarpanlara ayırma.

Önce, çarpanlara ayırmada yararlanacağımız bazı özel eşitlikleri tanıyalım. Aşağıdaki eşitlikleri izleyiniz.

$$(x+y)^0=1$$
$$(x+y)^1=x+y$$
$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

Bu eşitliklerden birinciyi tanımdan biliyorsunuz. Diğerlerini çarpma işlemini yaparak kolayca bulabilirsiniz. Bu eşitliklerin sağ tarafındaki ifadelerdeki düzen dikkatinizi çekecektir. Bunlarda x in kuvvetleri azalırken y nin kuvvetlerinin çoğaldığını ve baştan ve sondan aynı uzaklıktaki terimlerin katsayılarının aynı olduğunu görüyorsunuz.

Bu katsayıları Paskal üçgeni (Blaise Pascal, 1623–1662) denen aşağıdaki tablo ile elde edebiliriz.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
. . . . . .

Paskal üçgeninde herhangi bir satırdaki sayı, (varsa) bir yukarki satırda bu sayının üstüne gelen sayı ile, (varsa) onun hemen solundaki sayının toplamına eşittir. Böylece elde edilen her satırdaki sayı dizisini sağdan sola doğru yazarsak, dizi değişmez. Yukarıdaki Paskal üçgenini devam ettirerek $(x+y)^5$ in açılımını yazınız. Yukarıda verilen özel eşitliklerde y yerine $-y$ yazarsak, $(y \neq x)$

$$(x-y)^0=1$$
$$(x-y)^1=x-y$$
$$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$$
$$(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^2$$
$$(x-y)^4=x^4-4x^3y+6x^2y^2-4xy^3+y^4$$

açılımlarını buluruz. Siz de $(x-y)^5$ in açılımını bulunuz.

Çarpma işlemi ile,

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$$

olduğunu da bulabilirsiniz. Ayrıca çok önemli olan

$$x^2-y^2=(x-y)(x+y)$$
$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}.y+\ldots+y^{n-1})$$

eşitliklerini sağ taraftaki çarpmaları yaparak bulabilirsiniz. Bu biçimdeki eşitliklerden derecesi tek sayı olanlar da örneğin,

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$

de y yerine $(-y)$ koyarak,

$$x^3-(-y)^3=(x-(-y))(x^2+x(-y)+(-y)^2)$$

yani,

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$

elde edilir. Benzer biçimde,

$$x^5+y^5=(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$$

olduğunu bulunuz.

Çarpanlara ayırmada yeri geldikçe kullanabilmek için bu özel çarpmaları hatırınızda tutmalısınız. Aşağıdaki örneklerde hangi özel çarpmalardan yararlanıldığını belirtiniz.

7–5. Örnek

a) $4x^2+4xy+y^2=(2x+y)^2$

b) $25a^2+10ab+4b^2=(5a+2b)^2$

c) $\frac{1}{4}m^2-mn+n^2=\left(\frac{1}{2}m-n\right)^2$

d) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

e) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=\left(\frac{x}{5}-\frac{y}{4}\right)\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{4}\right)$

f) $(1+x)^2-y^2=(1+x-y)(1+x+y)$

g) $a^8-b^8=a^4-b^4)(a^4+b^4)=(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$
$=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$

h) $(2x-3y)^2-(x+2y)^2=[(2x-3y)-(x+2y)][(2x-3y)+(x+2y)]$
$=(x-5y)(3x-y)$

i) $64x^3-27p^3=(4x)^3-(3p)^3=(4x-3p)(16x^2+12xp+9p^2)$

j) $x^6+y^6=(x^2)^3+(y^2)^3=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

k) $c^2-x^2-2ac+a^2=(a-c)^2-x^2=(a-c-x)(a-c+x)$

l) $x^4y^4-512xy=xy(x^3y^3-8^3)=xy(xy-8)(x^2y^2+8xy+64)$

7–3. Alıştırmalar

1) Aşağıda verilen iki terimlilerin açılımlarını bulunuz.

a) $(2x-3y)^2$

b) $\left(x+\frac{2}{y}\right)^3$

c) $(5x-3y)^4$

d) $(x-2y)^3$

e) $\left(\frac{1}{x}-3y\right)^3$

f) $(5y+3y)^3$

2) Aşağıdaki ifadeleri çarpanlara ayırınız.

a) $64a^2-144ab^2+81b^4$

b) $\frac{25}{4}x^2-15xy+9y^2$

c) $x^2y^2-6xyz+9z^2$

d) $4(a+b)^2-12(a+b)c+9c^2$

e) $x^2-(y+1)^2$

f) $\frac{9}{25}a^2-\frac{16}{81}b^2$

g) $(a+b-c)^2-(2a-b+c)^2$

h) $25(x+2y)^2-9(3x-1)^2$

i) $2ab+a^2b^2-c^2+1$

j) $x^2-2x+1-a^2-4ab-4b$

k) $(x+3)(2x+1)-4x^2+1$

l) $(x^4+x^2y^2+y^4)$

m) $16x^4-9x^2+1$

n) $1-125a^3$

p) $8(a-2b)^3+1$

r) $64-(x-y)^3$

III. x^2+ax+b biçimindeki üç terimlinin çarpanlara ayrılması.

Bu tür polinomlarda, $(x\mp c)^2=x^2\mp 2cx+c^2$ eşitliklerinden yararlanılır. Bu eşitliklerin sağ tarafındanki üçüncü terim olan c nin ikinci terimdeki x in katsayısı olan 2c nin yarısının karesi olduğunu görünüz. O halde, x^2+6x-7 polinomunu x^2+6x'i kareye tamamlayarak aşağıdaki biçimde çarpanlara ayırabiliriz.

$$x^2+6x-7=x^2+6x+\left(\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2-7=x^2+6x+9-16=(x+3)^2-16$$

Böylece verilen polinomu iki kare farkı biçiminde yazmış oluyoruz. Buradan,

$$x^2+6x-7=(x+3)^2-16=(x+3-4)(x+3+4)=(x-1)(x+7)$$

elde edilir.

7-6. Örnek

a) $x^2+8x+15=x^2+8x+\left(\frac{8}{2}\right)^2-\left(\frac{8}{2}\right)^2+15$

$=x^2+8x+16-16+15$

$=x^2+8x+16-1$

$=(x+4)^2-1$

$=(x+4-1)(x+4+1)$

$=(x+3)(x+5)$

b) $x^2+5x-6=x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2-6$

$=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}-6$

$=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{49}{4}$

$=\left[\left(x+\frac{5}{2}\right)-\frac{7}{2}\right]\left[\left(x+\frac{5}{2}\right)+\frac{7}{2}\right]$

$=(x-1)(x+6)$

c) $-x^2-13x-12=-(x^2+13x+12)$

$=-\left[x^2+13x+\left(\frac{13}{2}\right)^2-\left(\frac{13}{2}\right)^2+12\right]$

$=-\left[\left(x+\frac{13}{2}\right)^2-\frac{121}{4}\right]$

$=-\left[\left(x+\frac{13}{2}\right)-\frac{11}{2}\right]\left[\left(x+\frac{13}{2}\right)+\frac{11}{2}\right]$

$=-(x+1)(x+12)$

d) m^6-7m^3-8 üç terimlisini çarpanlara ayırmak için önce m^3 yerine t yazalım. Buradan,

$t^2-7t-8=t^2-7t+\left(\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2-8$

$=\left(t-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{81}{4}$

$=\left(t-\frac{7}{2}-\frac{9}{2}\right)\left(t-\frac{7}{2}+\frac{9}{2}\right)$

$=(t-8)(t+1)$

$=(m^3-8)(m^3+1)$

$=(m-2)(m^2+2m+4)\ (m+1)(m^2-m+1)$

e) $x^2-2x-5=x^2-2x+1-1-5$

$=x^2-2x+1-6$

$=(x1-1)^2-(\sqrt{6})^2=(x-1-\sqrt{6})(x-1+\sqrt{6})$

$$(4x^2-1)(x^2-1)\ ,\ 5(4x^2-1)(x^2-1)\ ,\ -\frac{7}{3}(4x^2-1)(x^2-1)$$

polinomlarının herbiri ve daha genel olarak $k \in R$, $k \neq 0$ için,

$$k(4x^2-1)(x^2-1)$$

polinomu bu iki polinomun OKEK i olur. Yukarıda örnek olarak verdiğimiz OKEK lerden herbirini uygun reel sayılarla çarparak diğerlerini elde edebiliriz. Yani iki polinomun OKEK i sabit bir çarpan dışında aynıdır.

Pratik olarak bir takım polinomların OKEK ini bulmak için polinomlar asal çarpanlara ayrılır. Ortak çarpanlardan derecesi en büyük olanlarla ortak olmayanların çarpımı bize OKEK i verir. Eğer polinomların ayrıca tamsayı çarpanları varsa bunların da kendi aralarında OKEK i bulunarak bunun, OKEK olarak bulduğumuz polinoma katsayı olarak verilmesi işlemlerde kolaylık sağlar.

Bu iki polinomun OBEB i olarak da örneğin,

$$(2x+1)(x+1)\ ,\ 3(2x+1)(x+1)\ ,\ -\frac{9}{4}(2x+1)(x+1)$$

polinomlarını bulabiliriz. Daha genel olarak $k \in R$ ve $k \neq 0$ için bu iki polinom OBER i

$$k(2x+1)(x+1)$$

dir.

Bir takım polinomların OBEB ini pratik olarak bulmak için OKEK in bulunuşuna benzer biçimde, önce polinomlar asal çarpanlara ayrılır. Bu çarpanlardan ortak olanların en küçük üslüleri seçilir. Bunların çarpımı bize bu polinomların OBEB ini verir. Polinomların ayrıca sabit tamsayı çarpanları varsa bunların da kendi aralarında OBEB i bulunarak OBEB olarak bulunan polinoma katsayı olarak verilmesi işlemlerde kolaylık sağlar.

7–7. Örnekler

a) x^2+x-6 , x^2-9 , $2x-4$ polinomlarının OKEK ini bulalım.

$x^2+x-6=(x-2)(x+3)$

$x^2-9=(x-3)(x+3)$

$2x^2-4=2(x-2)$

OKEK: $2(x-2)(x-3)(x+3)$ dir.

b) x^2+x , x^2-1 , x^2-4x-5 polinomlarının OBEB ini bulalım.

$x^2+x=x(x+1)$

$x^2-1=(x-1)(x+1)$

$x^2-4x-5=(x+1)(x-5)$

OBEB: $(x+1)$ dir.

7–5. Alıştırmalar

1) Aşağıdaki polinomların OKEK ini bulunuz.

a) $6x^2-2x$, $9x-3$

b) $2x^2-4xy+2y^2$, x^3-y^3 , $4x-4y$

c) $x^2+4x-12$, $2x-4$, $7x^2+42x$

d) a^2b^2-3ab , a^2bc-3c , 3^3-c

2) Aşağıdaki polinomların OBEB ini bulunuz.

a) $5y^2-75$, $3y-15$,

b) x^3y-xy^3 , $2x-2y$, x^3-y^3

c) $-x^2-6x+7$, x^2-49

d) c^2-3c , $2c-6$, $5c^2-45$

7–3. Rasyonel İfadeler

Bundan önceki bölümde reel sayılar cismini genişleterek $R_{[x]}$ halkasını elde etmiştik. $R_{[x]}$ halkasının tamsayılar halkasına benzediğini biliyorsunuz. Z de bazı sayılar arasında bölme işleminin olmadığını ve buna benzer biçimde R halkasında da aynı durumu gözlemiş bulunuyoruz. Şimdi tamsayılardan rasyonel sayılara geçmek için takip ettiğimiz yolu $R_{[x]}$ halkasında da uygulayarak rasyonel ifadelerin cismini elde edeceğiz. Nasıl ki rasyonel sayılar cisminde bazı pozitif sayıların karekökü alınamıyorsa rasyonel ifadeler cisminde de bazı elemanların kareköklerı olmayacaktır. Rasyonel ifadelerin cismini de genişleterek içinde karekök küpkök ve başka işlemlerin yapılabileceği geniş bir cisim elde edilebilir.

P(x) ve sıfırdan farklı bir Q(x) polinomu için rasyonel sayılara benzetilerek,

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

biçimindeki her ifadeye bir rasyonel ifade diyelim. Rasyonel ifadelerin eşitliğini, toplamını ve çarpımını rasyonel sayılardakine benzer biçimde yapalım. Böylece elde edilen sistemin $R_{[x]}$ halkasını içine alacağını kolaylıkla görebilirsiniz. Bu cisme rasyonel ifadeler cismi diyeceğiz. Gerçekten, x elemanını reel sayılar kümesinden seçerek paydanın sıfır olduğunu haller dışında $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ daima bir reel değer verir. Yani, $x\in R$ için, $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ reel sayıların bir alt cümlesinden reel sayılara bir fonksiyon olarak düşünülebilir. Aynı şeyi $R_{[x,y]}$, $R_{[x,y,z]}$ halkaları içinde yapabiliriz. Böylece meydana gelecek cisim $R_{[x]}$ halkasından meydana gelen cisimden daha geniş olur. $R_{[x]}$ halkasından elde ettiğimiz rasyonel ifadeler cisiminde $\frac{1}{x}=x^{-1}$, $\frac{1}{x^2}=x^{-2}$ olacağı için x'in negatif kuvvetleri de vardır. x'in tam sayısal kuvvetlerinin çarpımı ve toplamı reel sayıların tam sayısal kuvvetlerinde olduğu gibi yapılabilir.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ biçimindeki rasyonel ifadeleri rasyonel sayılarda olduğu gibi sadeleştirebiliriz. Ancak bunu yaparken x elemanını tanımsız ve belirsiz kabul ediyoruz. Eğer x elemanını reel sayı olarak tanımlarsak, Örneğin, $\frac{x^2-4}{x-2}$ fonksiyonunun $x=2$ için değeri yoktur. (Neden?) Halbuki $x+2$ fonksiyonunun $x=2$ için değeri 4 tür. Öyleyse fonksiyon olarak $\frac{x^2-4}{x-2}$ ile $x+2$ fonksiyonları eşit olamaz.

$x\neq 2$ için,

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}=x+2$$

dir.

7-8. Örnekler

a) $$\frac{x}{x+1}-\frac{2}{x^2-1}=\frac{x}{x+1}-\frac{2}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{x(x-1)-2}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{x^2-x-2}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\frac{x-2}{x-1}$$

b) $$\frac{3x}{3x-y}-\frac{3xy}{9x^2-y^2}+\frac{9x^2}{y^2-9x^2}=\frac{3x(3x+y)-3xy-9x^2}{(3x-y)(3x+y)}$$
$$=\frac{0}{(3x-y)(3x+y)}$$

c) $$\frac{a^3+8}{2a-3}\cdot\frac{4a^2-9}{a^2+2a}=\frac{(a+2)(a^2-2a+4)}{2a-3}\cdot\frac{(2a-3)(2a+3)}{a(a+2)}$$
$$=\frac{(a^2-2a+4)(2a+3)}{a}$$

d) $$\frac{x^3+x^2y+xy^2}{x^3+xy^3}:\frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}=\frac{x(x^2+xy+y^2)}{x(x^2+y^2)}$$
$$\frac{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=x+y$$

7-6. Alıştırmalar

1) Aşağıdaki rasyonel ifadeleri sadeleştiriniz.

a) $\frac{x-5}{x^2-6x+5}$

b) $\frac{(x+y)^2-z^2}{x^2-(y+z)^2}$

c) $\frac{2x^2-4xy+2y^2}{(x-y)^2}$

d) $\dfrac{1-x^2}{(xy+1)^2-(x+y)^2}$

e) $\dfrac{4-(x+y)^2}{x+y)^2-y^2}$

f) $\dfrac{6x^2-13xy+6y^2}{4x^2-9y^2}$

2) Aşağıdaki toplama, çıkarma işlemlerini yapınız ve sonucu en basit biçimde veriniz.

a) $\dfrac{x}{x^2-9}+\dfrac{2}{x^2-2x-3}$

b) $\dfrac{3y+6}{y^2-y-6}-\dfrac{12}{y^2-2y-3}$

c) $\dfrac{x^2+xy}{x^2y-y^3}-\dfrac{x-y}{y(x+y)}-\dfrac{2y}{x^2-y^2}+\dfrac{3}{x+y}$

d) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{(x\ 1)^2}-\dfrac{3x-2}{x^2-1}$

e) $\dfrac{1}{a^2-4ab+3b^2}-\dfrac{3}{3a^2-10ab+3b^2}+\dfrac{1}{3a^2-4ab+b^2}$

f) $\dfrac{2x}{x^2-4}-\dfrac{1}{x^2+2x}+\dfrac{x-1}{2-x}$

3) Aşağıdaki çarpmaları yapınız.

a) $\dfrac{x^3-t^3}{(x-y)^2}\cdot\dfrac{2x-2y}{8x}$

b) $\dfrac{(a+b)^2-4}{a^2-(b-2)^2}\cdot\dfrac{3a-3b+6}{a-2}$

c) $\dfrac{x^6-y^6}{3x-1}\cdot\dfrac{x^2+y^2}{x^4-y^4}\cdot\dfrac{9x^2-1}{x^2-xy+y^2}$

d) $\dfrac{9a^2c}{5a^2-10a}\cdot\dfrac{a^2-4}{c^3-c}\cdot\dfrac{10c}{3a+6}$

e) $\dfrac{2x^2-x-6}{2x^2+x-3}\cdot\dfrac{2x^2+3x-2}{2x^2+x-1}$

f) $\dfrac{6x+4}{6x^2-x-2}\cdot\dfrac{4x^3-x}{x^3-8}\cdot\dfrac{x^2-2x+4}{4(x+1)}$

4) Aşağıdaki bölmeleri yapınız,

a) $\dfrac{x^2+xy}{x^2-xy}:\dfrac{x^3+x^2y}{xy^2+y^3}$

b) $-\dfrac{2a}{3b}:\dfrac{4a^3+2a^2}{6(a^2-1)}$

c) $\left(x+\dfrac{y}{z}\right):\left(x-\dfrac{y}{z}\right)$

d) $(x^2-5x+6):\dfrac{16-2x^3}{x^2-9}$

e) $\left(\dfrac{x^4-1}{16x^4-9y^2}\cdot\dfrac{4x^2-3y}{2x^2+2}:\dfrac{x-1}{4x^2+3y}\right.$

f) $\left(\dfrac{x^2\ x-2}{x^2-x-20}:\dfrac{x^2-4}{x^2-5x}\right):\dfrac{x-1}{3x}$

5) Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) $\dfrac{\dfrac{2x}{x^2-1}-1}{1-\dfrac{2x}{x-1}}$

b) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{(1+y)+\dfrac{2y^2}{1-y}}}$

c) $\left[1-\left(\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2\right]:\left[\left(\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2-1\right]$

d) $\left(\dfrac{a}{1+a}+\dfrac{1-a}{a}\right):\left(\dfrac{a}{1+a}-\dfrac{1-a}{a}\right)$

e) $\left(\dfrac{2x}{x+y}-\dfrac{y^2}{x^2-y^2}+\dfrac{y}{x-y}\right):\left(\dfrac{1}{x^2-y^2}+\dfrac{1}{x+y}\right)$

f) $2-\left[(x-1)^{-1}+\dfrac{1}{x^2-1}\right]^{-1}+\dfrac{1}{x^2-4}$

7–4. Bir Bilinmiyeli Denklemler

Her $P(x) \in R_{[x]}$ polinomunda x'i reel sayı olarak düşünürsek, P(x) polinomunun R den R ye bir fonksiyon olacağını biliyorsunuz. Bir $P(x)=x^2+3x-10$ polinomunda sözgelimi,

$$P(1)=-6$$
$$P(2)=0$$
$$P(-2)=-12$$
$$P(-5)=0$$

dır. Bu örnekte bir fonksiyonun bazı reel sayıları sıfıra eşlediğini görüyorsunuz. Sıfırdan farklı bir P(x) polinomunun x in hangi değerleri için sıfıra eşit değerler verdiğini, bilmek önemlidir. Sözgelimi, $P(x)=x^2+1$ ise x in hiçbir değeri sıfır vermez.

7–4. Tanım

Sıfırdan farklı bir $P(x) \in R_{[x]}$ polinomu için, $P(x)=0$ koşulunu sağlayan (varsa) her x sayısına P(x) polinomunun bir kökü ve $P(x)=0$ koşuluna da bir polinom denklem denir. Polinomun köklerine aynı zamanda polinom **denklemin kökleri** ve bu köklerin kümesine denklemin **çözüm (doğruluk) kümesi** denir. Denklemin köklerini bulma işlemlerine de denklemi **çözmek** denir.

Bu tanımdan sıfır polinomunun ve sabit polinomların kökü olmadığını da anlarız.

Burada bir noktaya dikkat etmeniz gerekmektedir. Sıfırdan farklı herhangi bir P(x) polinomunu bir denklem olarak $P(x)=0$ biçiminde yazmakla bu polinomun sıfır polinomu olduğunu ileri sürmüyoruz. Buradaki "=" işareti "hangi x sayı veya sayıları için P(x) in değeri sıfır olur" anlamındadır. Denklemde kullanılan bu "=" sembolü ile, daha önce iki polinomun eşitliği için kullanılan "=" sembolünün aynı olması sizi şaşırtmasın. Bazen iki polinomun eşitliği için "≡" sembolü kullanılır ve bunlara denk polinomlar da denir. Sözgelimi,

$$x^2-1 \equiv (x-1)(x+1)$$

dir. Biz bu kuralı kullanmayacağız. Ancak bu eşitliği yazarken onun bir denklem mi, yoksa gerçek bir eşitlik mi (denklik mi) olduğuna dikkat edeceğiz. Bir polinom denklem,

$$P(x)=Q(x)$$

biçiminde de yazılabilir. Bu eşitliği, "hangi x sayısı veya sayıları için P(x) in değeri Q(x) in değerine eşittir" anlamında anlayacağız. Söz gelimi,

$$P(x)=4x-2$$
$$Q(x)=x+7$$

olsun. $x=1$ için $P(1) \neq Q(1)$ ve $x=-2$ için de $P(-2) \neq Q(-2)$ olduğunu görüyorsunuz. $x=3$ için ise $P(3)=Q(3)$ olur. O halde biz, $P(x)=Q(x)$ yani, $4x-2=x+7$ yazmakla x in bu eşitliği gerçekleyen değerlerini düşünmüş oluyoruz. $P(x)=Q(x)$ denklemi, $P(x)-Q(x)=0$ biçiminde de yazılabilir. $P(x)=Q(x)$ denklemi ile $P(x)-Q(x)=0$ denkleminin çözüm kümeleri tamamen birbirinin aynı olur. Bu gerçeği örnekler üzerinde göreceğiz. O halde, $P(x)=Q(x)$ denklemini çözmek için Q(x) i sol tarafa almak yerinde olur. Şimdi polinom denklemlerin çözümleriyle ilgili örnekler verelim.

7–9. Örnekler

a) $ax+b=0$ $(a \neq 0)$ denklemini çözelim.

Önce, $ax+b+(-b)=-b$ yazabiliriz. Buradan,

$$ax=-b$$

$$\frac{1}{a} \cdot ax = \frac{1}{a} \cdot (-b)$$

ve nihayet,

$$x = -\frac{b}{a}$$

elde edilir. Karşıt olarak $x=-\frac{b}{a}$ iken, $ax=-b$ ve buradan da, $ax+b=0$ elde ederiz. O halde bu gerçeği,

$$ax+b=0 \iff x=-\frac{b}{a}$$

biçiminde yazabiliriz. Buradan, $ax+b=0$ $(a \neq 0)$ denkleminin bir tek kökü olduğunu ve bu kökün de $x=-\frac{b}{a}$ olduğunu anlıyoruz. Yani bu denklemin çözüm kümesini D ile gösterirsek, $D=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$ dır.

b) $5(x-2)-2x=-7+2(x+1)-x$

denklemini çözelim. Önce çarpmanın dağılma özeliğini uygulayarak bu denklemi,

$$5x-10-2x=-7+2x+2-x$$

biçiminde yazar ve buradan devamla,

$$5x-2x-2x+x=-7+2+10$$
$$2x=5$$
$$\frac{1}{2}\cdot 2x=5\cdot\frac{1}{2}$$
$$x=\frac{5}{2}$$

elde ederiz. O halde,

$$D=\left\{\frac{5}{2}\right\}$$

dir.

Çözümü pratikleştirmemiz faydalıdır. Yukarıdaki örnekte önce parantezleri açtığımıza, sonra da x li terimleri eşitliğin bir tanına, sabit sayıları da eşitliğin öteki yanına aldığımıza dikkat ediniz.

c) $-2(3x-1)+(x-3)=7-5x$ denklemini çözelim.

$-6x+2+x-3=7-5x$

$-6x+x+5x=7-2+3$

$0.x=8$

elde ederiz. Bu son eşitlikte sol taraf x in her değeri için sıfırdır. O halde bu bir çelişmedir. Yani, bu denklemin çözüm kümesi boş kümedir, $D=\emptyset$ yazarız.

d) $-3(x+2)-(2x-1)=3(1-x)-(5x+8)$ denklemini çözelim. Buradan,

$-3x-6-2x+1=3-3x-5x-8$

$-3x-2x+3x+5x=3-8+6-1$

$0.x=0$

elde edilir. Bu son eşitlik x in her değeri için gerçeklenir. O halde

$D=R$ dir.

e) $x^2+2=0$ olsun. Buradan, $x^2=-2$ elde edilir. Hiçbir reel sayının karesinin negatif olmadığını biliyorsunuz. O halde, $D=\emptyset$ dir.

f) $x^4-16=0$ olsun. Önce polinomu çarpanlara ayıralım.

$(x-2)\ (x+2)\ (x^2+4)$ elde ederiz. Buradan,

$x-2=0$ veya $x+2=0$ veya $x^2+4=0$ dır. Bunlardan $x^2+4=0$ denkleminin çözümü yoktur. (Neden?) O halde, $x-2=0$ veya $x+2=0$ dan $D=\{2, -2\}$ elde edilir.

7-7. Alıştırmalar

1) Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

a) $2x-5(3x-1)=-7(x+1)$

b) $3(-2x+1)-(x-7)=0$

c) $\frac{1}{3}x-\frac{3}{2}=x+2$

d) $5x-(x-6)=(4x-1)-7$

e) $-3x+5-(2x-3)=4x+(x+8)$

f) $x^2-9=0$

g) $x^3-4x=0$

h) $\frac{x^2}{25}-\frac{1}{9}=0$

i) $x^2-3x-10=0$

j) $(2x+1)\ (2x+6)-7(x-2)=4(x+1)\ (x-1)-9x$

k) $5x-\{8x-3[15-6x-(4-5x)]\}=6$

l) $\frac{x+1}{7}+x(x-2)=(x-1)^2$

m) $\left(\frac{3}{2}x-2\right)^2+\left(2x+\frac{1}{2}\right)^2=\left(1+\frac{5}{2}x\right)^2-\frac{33}{8}x$

n) $(2x-1)^2-9(x+8)^2=0$

2) Aşağıdaki polinom denklemlerin reel kökleri olmadığını gösteriniz. (Çarpanlara ayırmayı deneyiniz.)

a) $x^2+2x+3=0$

b) $x^2-x+1=0$

c) $x^2+x+1=0$

3) Aşağıdaki denklemlerin reel köklerini bulunuz.

a) $x^3-1=0$

b) $x^3+8=0$

c) $x^4-13x+36=0$

d) $x^2=0$

e) $x^3+x=0$

7-5. Rasyonel Denklemler

$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ rasyonel ifadesiyle elde edilen,

$R(x)=0$ yani, $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$

biçimindeki denklemlere rasyonel denklemler diyeceğiz. Böyle bir,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0$$

denkleminin kökü deyince, $Q(x)$ i sıfır yapmayan $P(x)$ i sıfır yapan x değerini anlarız. O halde örneğin, bir a sayısı bu denklemin kökü ise,

$$Q(a)\neq 0 \text{ ve } P(a)=0 \text{ dır.}$$

Rasyonel denklemler, $R_1(x)=R_2(x)$ biçiminde de yazılabilir. Böyle bir denklemin çözümü ile $R_1(x)-R_2(x)=0$ denkleminin çözüm kümeleri aynıdır. Bu gerçeği de örnekler üzerinde inceleyebilirsiniz.

7-10. Örnekler

a) $\frac{2-x}{x}=-1$ denklemini çözelim.

$$\frac{2-x}{x}=-1 \iff \frac{2-1}{x}+1=0 \iff \frac{2}{x}=0$$

elde edilir. $\frac{2}{x}=0$ eşitliğini sağlayan bir reel sayı var mıdır? O halde, $D=\emptyset$ dir.

b) $\frac{5}{(x+4)(x-1)}+\frac{1}{(x+4)}=1$ denklemini çözelim.

$$\frac{5}{(x+4(x-1)}+\frac{1}{(x+4)}-1=0 \Rightarrow$$

$$\frac{5+x-1-(x+4)(x-1)}{(x+4)(x-1)}=0 \Rightarrow \frac{-x^2-2x+8}{(x+4)(x-1)}=0$$

elde edilir. $x\neq -4$ ve $x\neq 1$ koşulu ile $-x^2-2x+8=0$ denkleminin kökleri verilen denklemin de kökleridir. O halde $D=\{2\}$ dir.

c) $\frac{3x}{x^2-x-2}+\frac{2}{2-x}-\frac{1}{1+x}=0$

Denklemini çözelim.

$$\frac{3x}{(x+1)(x-2)}-\frac{2}{(x-2)}-\frac{1}{x+1}=0$$

$$\frac{3x-2(x+1)-(x-2)}{(x+1)(x-2)}=0$$

$$\frac{0}{(x+1)(x-2)}=0$$

dir. O halde $x\neq -1$ ve $x\neq 2$ koşulu ile her reel sayı bu denklemin köküdür. Yani $D=\{x : x\neq -1 \text{ ve } x\neq 2,\ x\in R\}$

d) $\frac{1}{x+3}-\frac{5}{3x+9}=\frac{x}{4x+12}$

denklemini çözelim.

$$\frac{1}{x+3}-\frac{5}{3(x+3)}-\frac{x}{4(x+3)}=0 \Rightarrow \frac{12-20-3x}{12(x+3)}=0$$

$$\frac{-8-3x}{12(x+3)}=0$$

dır. $x\neq -3$ için $-8-3x=0$

$x=-\frac{8}{3}$ dür, buradan, $D=\left\{\frac{-8}{3}\right\}$ olur.

7-8. Alıştırmalar

Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

1) $\frac{2x}{x-1}=\frac{x}{x+1}$

2) $\frac{3x-1}{x^2-3x+2}-\frac{3}{x-2}=0$

3) $\frac{3}{x^2-4}+\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+2}=0$

4) $\frac{5}{x^2-x-20}-\frac{1}{x^2-25}=0$

5) $\frac{x}{x^3+8}-\frac{1}{x+2}=\frac{5}{x^2-2x+4}$

6) $\frac{x}{x^2+3x-4}-\frac{x-1}{2x+8}+\frac{3}{x-1}=0$

7) $\frac{3x+2}{2x^2-x-3}+\frac{3x-1}{2x^2-3x}=0$

8) $\frac{1}{x^2+1}+\frac{3}{x^4-1}=0$

9) $\frac{5}{x^2-1}-\frac{2}{x^3-1}=\frac{5}{x^2+x+1}$

10) $\frac{3}{5x-1}=\frac{3x}{5x^2+9x-2}-\frac{2}{1-25x^4}$

11) $\frac{1}{3x-2}-\frac{x\,1}{6x^2-4x}+\frac{3x-13}{8-18x^2}=0$

YEDİNCİ BÖLÜMLE İLGİLİ TESTLER

1. $P(x)=x^2-3x+4$ olduğuna göre $P(\sqrt{2}+1)$ in eşiti hangisidir?

a) $6+5\sqrt{2}$ b) $4-\sqrt{2}$ c) $6-5\sqrt{5}$
d) $4+5\sqrt{2}$ e) $4+\sqrt{2}$

2. Bir P(x) polinomu x—2 ile bölününce 5 kalanını x—1 ile bölününce 3 kalanı elde ediliyor. (x—1) (x—2) çarpımına bölününce elde edilen kalan aşağıdakilerden hangisidir?

a) 3x—1 b) 2x+1 c) x+3
d) 5 e) Hiçbiri

3. 2x—5(3x—1)=—7(x+1) denkleminin kökü aşağıdakilerden hangisidir?

a) —2 b) 2 c) $\frac{17}{6}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $-\frac{17}{6}$

4. x^6-y^6 nın çarpanlara ayrılmış şeklinde en çok kaç çarpan bulunur?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

5. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+6}$ rasyonel ifadesi en sade olarak aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\frac{x-2}{x-6}$ b) $\frac{x-2}{x+6}$ c) $\frac{x+2}{x+6}$ d) $\frac{x+2}{x-6}$ e) Hiçbiri.

6. $\left[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right]^{-1}$ aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\frac{x^2-1}{2}$ b) $\frac{x^2+1}{2x}$ c) $\frac{1-x^2}{2}$ d) $\frac{x^2-1}{2x}$ e) Hiçbiri.

7. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}:\frac{x-1}{x-2}$ eşiti aşağıdakilerden hangisidir?

a) 1 b) 0 c) $\frac{(x-1)^2}{(x-2)^2}$ d) $\frac{x+2}{x-1}$ e) Hiçbiri.

8. $\frac{x^2-3x}{x^2-9}\cdot\frac{x^2+4x+3}{x^2+x}$ çarpımının sonucu aşağıdakilerden hangisidir?

a) 0 b) 1 c) $\frac{x-3}{x\ 1}$ d) $\frac{x\ 3}{x}$ e) $\frac{x-3}{x}$

9. $5x^3-7x^2+2+P(x)=x^3-2x^2+3x+1$ eşitliğini sağlayan (Px) polinomu hangisidir?

a) $-4x^3+10x^2+3x-1$ b) $-4x^3+5x^2+3x-1$
c) $4x^3-10x^2-3x+1$ d) $-4x^3-10x^2+3x+1$
e) $4x^3+10x^2+3x-1$

10. $\left(\frac{x^3-1}{x^2-4x+4}\cdot\frac{x-2}{x-1}\right):\frac{x^2+x+1}{x-2}$ ifadesinin en sade şekli aşağıdakilerden hangisidir?

a) $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ b) $\frac{x^2+x+1}{x-2}$ c) $\frac{(x-2)^2}{(x^2+x+1)^2}$
d) 1 e) 0

SEKİZİNCİ BÖLÜM

ANALİTİK GEOMETRİ

Analitik geometri, geometri problemlerini sayılarla ve matematik işlemlerle çözme olanaklarını sağlar. Bu geometri ilk kez 1637 yılında Rene Descartes (Dekart) (1596—1650) adlı bir Fransız matematikçisi tarafından kurulmuştur. Analitik geometri ile oldukça güç görünen bir düzlem geometri problemini daha kolay olarak çözebildiğinizi göreceksiniz.

Bu bölümde edineceğiniz bilgiler, ilerde okuyacağınız analitik geometriye bir başlangıç olacaktır.

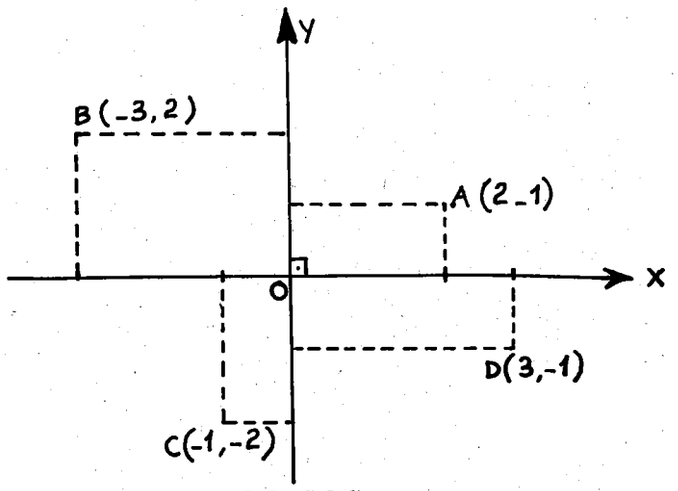
8–1. Koordinat Sistemi

Üçüncü bölümde, iki kümenin kartezyen çarpımını görürken koordinat sisteminden de söz etmiştik. Bu sistemin, orijin (başlangıç) adı verilen bir noktada dik kesişen, biri yatay diğeri düşey iki doğrudan oluştuğunu hatırlayınız. Bunlardan yatay olanına apsis ekseni, düşey olanına ordinat ekseni ve bu sisteme de koordinat sistemi demiştik. Düzlemde bir noktayı ikililerle belirttiğimizi ve bu ikililerin birinci bileşenine bu noktanın apsisi deyip x ile, ikinci bileşenine de bu noktanın ordinatı deyip y ile gösterdiğimizi biliyorsunuz.

8–1. Örnek

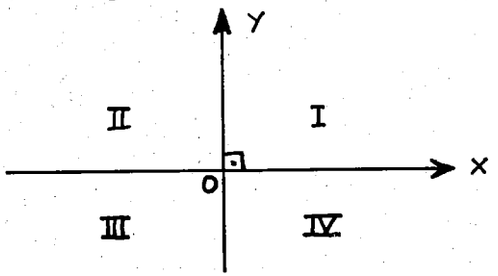
A(2,1), B(—3,2), C(—1,—2), D(3,—1) noktalarını koordinat sisteminde gösterelim.

Çözüm : A noktasının apsisi olan 2 yi apsis ekseni olan Ox ekseninde, ordinatı 1 i de ordinat ekseni olan Oy ekseninde işaretleriz. Eksenler üzerinde işaretlenen bu noktalardan eksenlere dikler çıkarız. Diklerin kesim noktası A noktasıdır. B, C, D noktalarını da benzer biçimde buluruz. (8–1. Şekil)



(8–1. Şekil)

Koordinat sisteminde orijine karşı gelen ikili (0 , 0) dır. Apsis ekseni ile ordinat ekseni birer reel sayı eksenidirler. Şu halde, x∈R ve y∈R olmak üzere (x , y) biçimindeki bir reel sayı ikilisine koordinat sisteminde yalnız bir nokta, her noktaya da yalnız bir reel sayı ikilisi karşı gelir. Böylece koordinat sistemine yerleştirilen bir düzlemin noktaları ile RxR in elemanları arasında bire–bir eşleme kurmuş oluyoruz. Apsis ve ordinat eksenleri adını verdiğimiz bu doğrular düzlemi dört bölgeye ayırır. (8–2. Şekil) de bu bölgeler, I, II, III, IV numaralarıyla gösterilmiştir. Eksenler, bu bölgelerden hiçbirine de ait değillerdir.



(8–2. Şekil)

I. bölgedeki noktaların apsis ve ordinatları pozitif, II. bölgedeki noktaların apsisleri negatif, ordinatları pozitif, III. bölgedeki noktaların apsis ve ordinatları negatif, IV. bölgedeki noktaların ise apsisleri pozitif ordinatları negatiftir. Ox ekseni üzerinde bulunan noktaların ordinatları sıfır, Oy ekseni üzerindeki noktaların ise apsisleri sıfırdır.

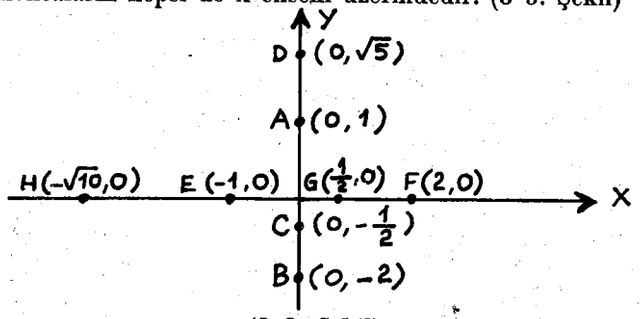
8–2. Örnek

a) A(0,1), B(0,—2), C $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$, D$(0,\sqrt{5})$

b) E(—1,0), F(2,0), G $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, H$(-\sqrt{10},0)$

noktalarını koordinat sisteminde gösterelim.

Çözüm : Örneğimizin a şıkkındaki noktaların hepsi y ekseni, b şıkkındaki noktaların hepsi de x ekseni üzerindedir. (8–3. Şekil)



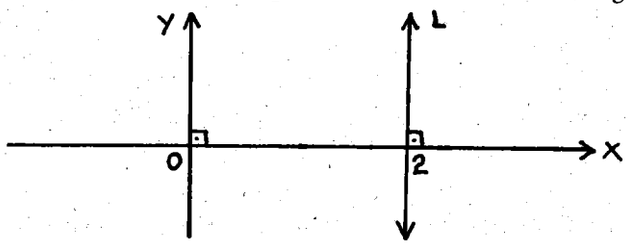
(8–3. Şekil)

Bazı koşullarla verilen noktaların kümesini koordinat sisteminde gösterebiliriz. Verilen koşullar reel sayı ikilileri için olacaktır. Çoğu kez (x , y) biçimindeki reel sayı ikilileri arasındaki şartlar $y=mx$, $y=mx+n$, $x+y>0$, $ax+by+c=0$, $ax+by+c>0$, $ax+by+c<0$ veya bunlara benzer biçimde olabilirler.

8–3. Örnek

$A=\{(x , y)|x=2,\ (x , y)\in RxR\}$ kümesini koordinat sisteminde gösterelim.

Çözüm : (8–4. Şekil) deki L doğrusu üzerindeki her noktanın apsisi 2 dir. Karşıt olarak düzlemde apsisi 2 olan noktalar da L doğrusu üzerindedir.

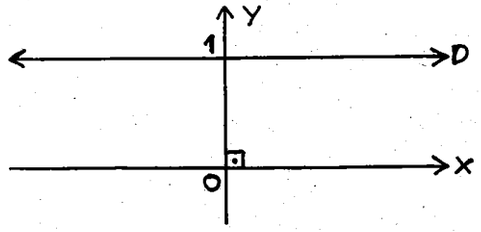


(8–4. Şekil)

8–4. Örnek

$B=\{(x , y)|y=1,\ (x , y)\in RxR\}$ kümesini koordinat sisteminde gösterelim.

Çözüm : (8–5. Şekil) deki D doğrusu B kümesidir.

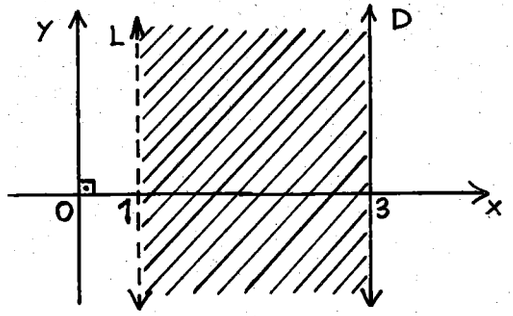


(8–5. Şekil)

8–5. Örnek

$C=\{(x , y)|1<x\leqslant 3,\ (x , y)\in RxR\}$ kümesini koordinat sisteminde gösterelim.

Çözüm : (8–6. Şekil) de C kümesini, L ile D doğruları arasındaki noktaların kümesi ile D doğrusunun birleşiminden oluşan küme olarak görüyorsunuz.

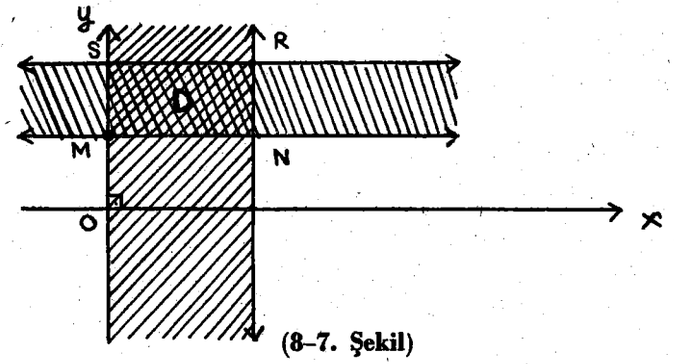


(8–6. Şekil)

8–6. Örnek

$D=\{(x , y)|0\leqslant x\leqslant 2$ ve $1\leqslant y\leqslant 2\}$ kümesini koordinat sisteminde gösterelim. (Sadelik için, $(x , y)\in RxR$ olduğu yazılmamıştır. Bu bölümde vereceğimiz nokta kümelerinde x ile y nin reel sayı olduğu unutulmamalıdır.)

Çözüm : D kümesi (8–7. Şekil) de taranmış iki nokta kümesinin kesişimi olan MNRS dikdörtgeni ile onun içinin birleşimidir.



(8–7. Şekil)

8–1. Alıştırmalar

1) A(—3,2), B(4,1), C(2,—4), D $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$, E $\left(-2\frac{1}{2}, 0\right)$, F$(0, -\sqrt{5})$ noktalarını koordinat sisteminde gösteriniz.

2) A(3,3) olsun, [AA′] doğru parçasının orta noktası orijin olacak biçimde alınan A′ noktasının koordinatlarını bulunuz.

3) A(2,3) olsun. A noktasından x eksenine [AH] dikmesini çiziniz. H noktasının koordinatlarını bulunuz.

4) Aşağıdaki nokta kümelerini koordinat sisteminde gösteriniz.

a) $A=\{(x,y)|\ \ 1\leqslant x\leqslant 3\}$

b) $B=\{(x,y)|-1\leqslant x\leqslant 1$ ve $-2\leqslant y\leqslant 2\}$

c) $C=\{(x,y)|-1\leqslant x\leqslant 1$ veya $-2\leqslant y\leqslant 2\}$

d) $D=\{(x,y)|\ \ 0\leqslant x<3$ ve $0\leqslant y<2\}$

e) $E=\{(x,y)|\ \ 0\leqslant x\leqslant 3$ veya $0\leqslant y\leqslant 2\}$

f) B kümesi ile C kümesini ve D kümesi ile E kümesini karşılaştırınız.

5) Koordinat sisteminin I. ve III. bölgesinden geçen açıortayını çiziniz. Bu açıortay üzerinde bulunan A(2,y), B(—3,y), C(x,—4), D(x,1) noktalarındaki bilinmeyenleri bularak noktaları belirtiniz.

6) II. ve IV. bölgeden geçen açıortayı çiziniz. Bu açıortaylar üzerinde A(x,1), B(x,—2), C(—3,y), D(4,y) noktalarını belirtiniz.

7) Bir köşesi A(4,4) ve bir köşegeni [0A] olan kareyi koordinat sisteminde çiziniz. Diğer köşelerinin koordinatlarını bulunuz.

8) A(0,0), B(4,0), C(0,4) üçgenini koordinat sisteminde çizerek kenar uzunluklarını ve alanını bulunuz.

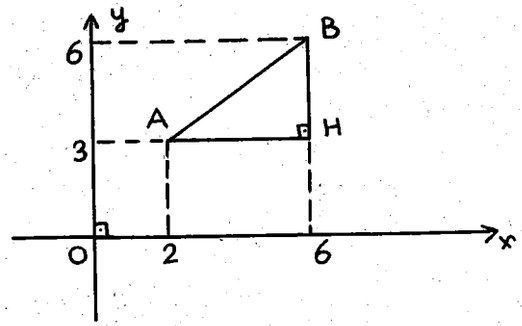
8–2. İki Nokta Arasındaki Uzaklık

Altıncı bölümde, bir doğru üzerinde alınan iki nokta arasındaki uzaklığın, bunların koordinatları farkının mutlak değerine eşit olduğunu gördünüz ve Pisagor teoremi adı verilen "Bir dik üçgende hipotenüsün uzunluğunun karesi, dik kenarların uzunlukları kareleri toplamına eşittir." teoremini de hatırlayınız. Bu bilgilerden yararlanarak iki nokta arasındaki uzaklığı hesaplayabiliriz.

8–7. Örnek

A(2,3), B(6,6) olsun. Şekil çizerek |AB| yi hesaplayalım. (8–8. Şekil) i inceleyiniz.

Çözüm :



(8–8. Şekil)

$\widehat{ABH}$ dik üçgeninde |AH|=4, |BH|=3 tür. Neden? Pisagor teoremine göre, $|AB|^2=|AH|^2+|BH|^2$ dir. Buradan, $|AB|^2=16+9$, |AB|=5 bulunur.

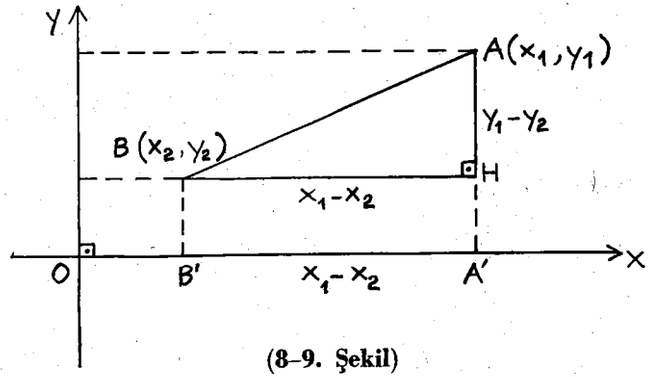
8–1. Teorem

Koordinat sisteminde $A(x_1,y_1)$ ve $B(x_2,y_2)$ ise

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \text{ dir.}$$

İspat : (8–9. Şekil) deki $\widehat{ABH}$ dik üçgenine Pisagor teoremi uygulanırsa,

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \text{ elde edilir.}$$



(8–9. Şekil)

8–8. Örnek

M(—3,2) ve N(1,5) olduğuna göre |MN| yi bulalım.

Çözüm : $|MN|=\sqrt{(-3-1)^2+(2-5)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ olur.

8–2. Teorem

Koordinat sisteminde $A(x_1,y_1)$ ve $B(x_2,y_2)$, [AB] doğru parçasının orta noktası olan C nin koordinatları, x_1 ve y_1 ise,

$$x_1=\frac{x_1+x_2}{2}, y_0=\frac{y_1+y_2}{2} \text{ dir.}$$

İspat : Bu teoremin ispatı için 8–1. teoremden yararlanalım. C nin AB nin orta noktası olması için $|AC|=|CB|=\frac{1}{2}|AB|$ olmalıdır.

$$|AC|=\sqrt{\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y_1-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2}$$

$$|AC|=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$|AC|=\frac{1}{2}\cdot|AB| \text{ olur.}$$

8–9. Örnek

A(3,—1) ve B(1,7) verilsin. [AB] doğru parçasının C orta noktasının koordinatlarını bulalım.

Çözüm : $C(x_0,y_0)$ ise $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y_0=\frac{y_1+y_2}{2}$ dir. O halde

$x_1=\frac{3+1}{2}=2$, $y_1=\frac{-1+7}{2}=\frac{6}{2}=3$ yani, C(2,3) olarak bulunur.

8–2. Alıştırmalar

1) Aşağıdaki noktalar arasındaki uzaklıkları hesaplayınız.

a) (1,—3), (6,9)

b) (3,2), (—2,—1)

c) (0,4), (—2,2)

d) $\left(2\frac{1}{2},0\right)$, $\left(\frac{1}{2},-1\frac{1}{2}\right)$

2) Köşeleri A(5,7), B(1,4), C(—3,—6) olan üçgenin çevresini hesaplayınız.

3) Bir [AB] doğru parçasının orta noktası C olsun. C(2,—1) ve A(3,—2) ise B nin koordinatları ne olur?

4) A(—2,—3), $B\left(\frac{1}{2},0\right)$, $C\left(5\frac{1}{2},6\right)$ noktalarının doğrusal olup olmadığını araştırınız.

5) A(1,4), B(5,1), C(2,—3) üçgeninin kenarlarının orta noktaları M, N, P ise $\widehat{ABC}$ üçgeni ile $\widehat{MNP}$ üçgeninin çevrelerini hesaplayınız ve bunları karşılaştırınız.

6) ABCD dörtgeninde [AC] ve [BD] köşegenleri birbirini ortalamaktadır. A(1,3), B(—4,2), C(—2,—4) ise D noktasının koordinatları ne olur?

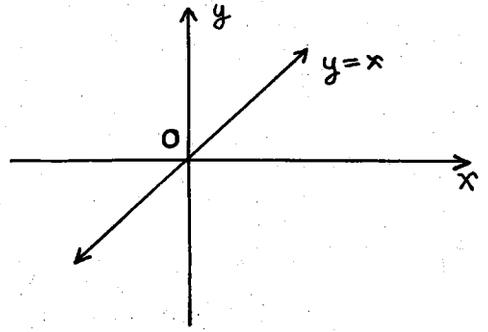
8–3. Doğrunun Denklemi

Bir doğrunun denklemi, o doğrunun her noktasının apsis ve ordinatı arasındaki ortak bağıntıdır. Doğrunun bir nokta kümesi olduğunu da hatırlarsak doğrusal noktaların koordinatlarının sağladığı bağıntı bu doğrunun denklemi olacaktır. Doğrunun denklemi verildiğinde koordinat sisteminde bu doğrunun grafiğini çizebileceğiz. Önce bazı örnekler verelim.

8–10. Örnek

$A=\{(x,y)|y=x,\ (x,y)\in RxR\}$ kümesini koordinat sisteminde gösterelim.

Çözüm : Öyle noktalar düşüneceğiz ki bu noktaların apsisleri ordinatlarına eşit olacaktır. (8–10. Şekil).

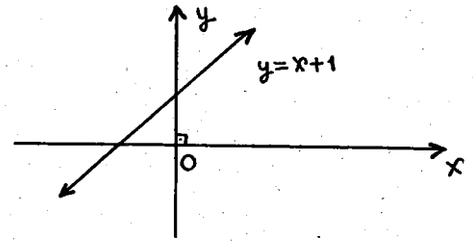


(8–10. Şekil)

8–11. Örnek

$B=\{(x,y)|y=x+1,\ (x,y)\in RxR\}$ kümesinin koordinat sisteminde gösterelim.

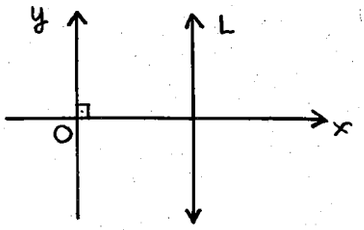
Çözüm : B kümesi ordinatı apsisinden 1 fazla olan noktaların kümesidir. (8–11. Şekil) deki doğru B kümesidir.



(8–11. Şekil)

8–12. Örnek

(8–12). Şekil) de y eksenine paralel ve y eksenine uzaklığı a olan bir L doğrusu çizilmiştir. Bu L doğrusu üzerindeki noktalar kümesini belirtelim.

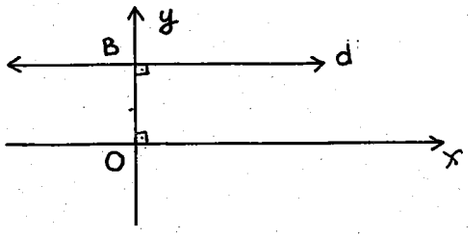


(8–12. Şekil)

Çözüm : $|OA|=a$ olduğundan L nin her noktasının apsisi a dır. O halde L nin üzerindeki noktalar kümesi $C=\{(x,y)|\ x=a,\ (x,y)\in RxR\}$ olacaktır.

8–13. Örnek

(8–13. Şekil) de x eksenine paralel ve x eksenine uzaklığı a olan bir d doğrusu çizilmiştir. d doğrusu üzerindeki noktaların kümesini belirtelim. (8–13. Şekil)



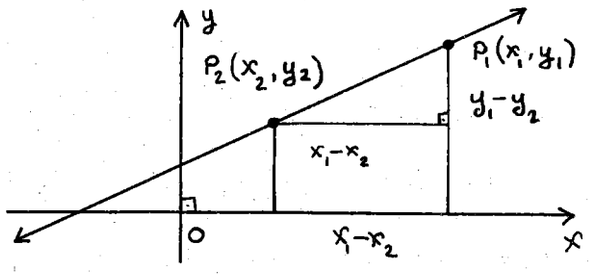
(8–13. Şekil)

Çözüm : $|OB|=b$ olduğundan d nin her noktasının ordinatı b dir. O halde d nin üzerindeki noktalar kümesi $C=\{(x,y)|y=b,\ (x,y)\in RxR\}$ olacaktır.

Bir doğrunun koordinat düzlemindeki konumunu belirtmek için doğrunun eğimi denen bir kavram tanımlayacağız.

8–1. Tanım

Bir doğru üzerindeki herhangi iki noktanın ordinatları farkının apsisleri farkına oranına bu doğrunun eğimi denir.



(8–14. Şekil)

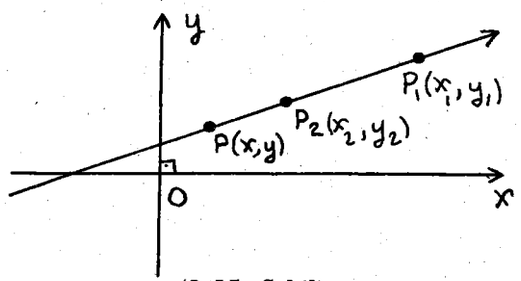
$P_1(x_1,y_1)$ ve $P_2(x_2,y_2)$ noktalarından geçen doğrunun eğimi, $m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ veya $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ dir. (8–14. Şekil)

8–14. Örnek

A(–3,5), B(4,—1) noktalarından geçen doğrunun eğimini bulalım.

Çözüm : $m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{5-(-1)}{-3-4}=\frac{6}{-7}=-\frac{7}{6}$ dir.

Şimdi verilen iki noktadan geçen doğrunun denklemini veren formülü elde edelim. (8–15. Şekil)



(8–15. Şekil)

$P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ verilen iki nokta ve P(x,y) noktası ise P_1 P_2 doğrusu üzerinde P_1 ve P_2 den farklı herhangi bir nokta olsun. Doğrunun eğimi tanımından, bu üç noktadan ikisini alarak,

$$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} \text{ ve } m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

yazabiliriz. Buradan,

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

ve orantı özelliğini kullanarak, iki noktadan geçen doğrunun denklemini,

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

biçiminde elde etmiş oluruz.

8–15. Örnek

A(1,3), B(—2,5) noktalarından geçen doğrunun denklemini yazalım.

Çözüm : $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ denkleminde $x_1=1$, $y_1=3$, $x_2=-2$, $y_2=5$ değerlerine yazılırsa, $\frac{x_1-1}{-2-1}=\frac{y-3}{5-3}$ ve buradan da $2x+3y-11=0$ denklemi elde edilir.

İki noktası verilen doğru denklemini $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ biçiminde elde etmiştik. Bu eşitlikte ortalar yanlar çarpımını birbirine eşlersek,

$x(y_2-y_1)-x_1(y_2-y_1)=y(x_2-x_1)-y_1(x_2-x_1)$ ve buradan

$x(y_2-y_1)-y(x_2-x_1)-x_1(y_2-y_1)+y_1(x_2-x_1)=0$ olur.

$y_2-y_1=a$, $-(x_2-x_1)=b$, $-x_1(y_2-y_1)-y_1(x_2-x_1)=c$ alınırsa

$ax+by+c=0$ elde edilir.

Bu son eşitlik bir doğrunun denklemidir. O halde x ve y ye göre birinci dereceden bir eşitlik bir doğru denklemidir.

$ax+by+c=0$ denkleminde $by=-ax-c$ ve buradan da eğer $b\neq 0$ ise $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ edle edilir. $-\frac{a}{b}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=m$ ve $-\frac{c}{b}=n$ alarak $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ yi $y=mx+n$ biçiminde yazabiliriz. $y=mx+n$ eşitliği doğru denkleminin başka bir biçimde gösterilişidir. $b=0$ olursa $ax+c=0$ ve buradan da $x=-\frac{c}{a}$ olurki bu Oy eksenine paralel bir doğrunun denklemidir.

İki noktadan geçen doğru denkleminin, $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ olduğunu biliyorsunuz. Buradan $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ elde edilir. Eğim $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ olduğundan $y-y_1=m(x-x_1)$ elde edilir. Böylece, bir noktası ve eğimi bilinen bir doğrunun denklemini elde etmiş oluyoruz.

8–16. Örnek

A(—1,3) noktasından geçen ve eğimi m=2 olan doğrunun denklemini yazalım.

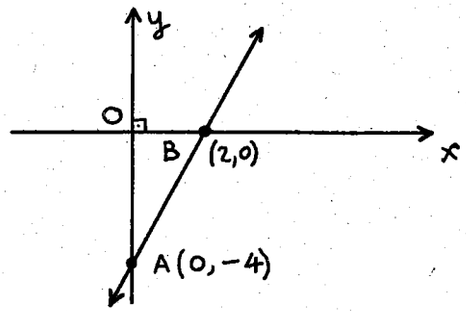
Çözüm : $y-y_1=m(x-x_1)$ denkleminde $x_1=-1$, $y_1=3$ ve $m=2$ yazılırsa, $y-3=2(x+1)$ ve buradan $y=2x+5$ elde edilir.

Bir doğru denklemi verildiğinde bunun grafiğini çizmek için bu doğruya ait iki noktanın bulunması yeter. (6–1. Aksiyom)

8–17. Örnek

2x—y=4 doğrusunun grafiğini çizelim.

Çözüm : x=0 için y=—4, y=0 için x=2 elde edilir. O halde bu doğruya ait iki nokta, A(0,—4) ve B(2,0) dir. Bu iki noktayı birleştiren doğru 2x—y=4 ün grafiğidir. (8–16. Şekil).

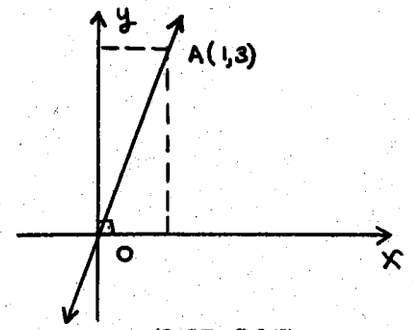


(8–16. Şekil)

8–18. Örnek

y=3x doğrusunun grafiğini çizelim.

Çözüm : x=0 için y=0, x=1 için y=3 olur. O halde doğru, 0(0,0) ve A(1,3) noktalarından geçmektedir. (8–17. Şekil)

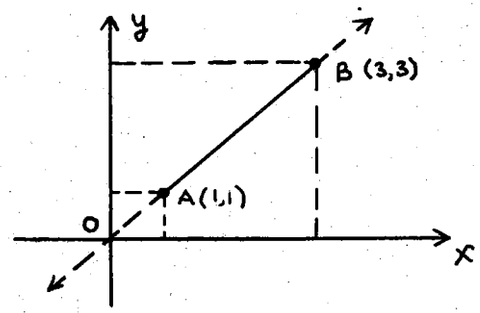


(8–17. Şekil)

8–19. Örnek

M={(x,y)|y=x ve $1\leqslant x\leqslant 3$} kümesini koordinat sisteminde gösterelim.

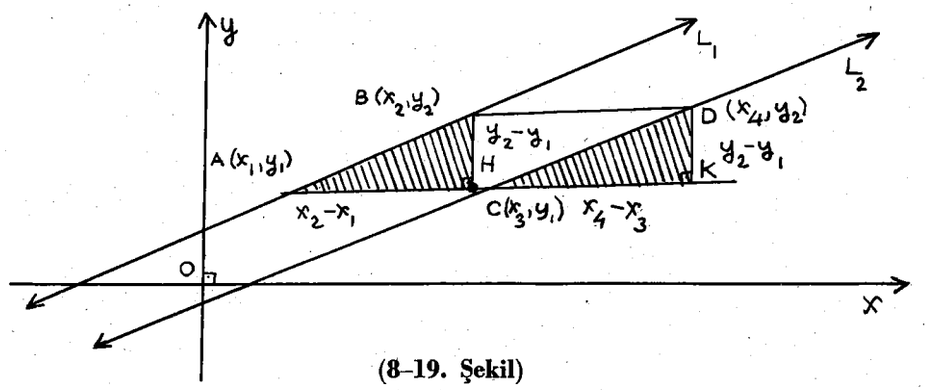
Çözüm : y=x denkleminden x=0 için y=0, x=1 için y=1 elde edilir. Önce 0(0,0) ve A(1,1) noktalarından geçen doğru çizilir. Sonra bu doğru üzerinde apsisi 1 olan A(1,1) ve apsisi 3 olan B(3,3) noktası alınır. İstenen nokta kümesi [AB] doğru parçasıdır. (8–18. Şekil)



(8–18. Şekil)

8–3. Teorem

İki doğru paralel ise eğimleri eşittir. (8–19. Şekil)



(8–19. Şekil)

Hipotez : $L_1 \neq L_2$

Hüküm : $m_1 = m_2$(m_1,L_1 in, m_2, L_2 nin eğimidir.)

İspat : L_1, L_2 üzerinde sıra ile, ordinatları eşit olan A, C, ve B, D noktaları alınmıştır. $\widehat{ABH}$ dik üçgeni ile $\widehat{CDK}$ dik üçgeni birbirine eştir. Neden? Bu eşlikten $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$ olur.

L_1 doğrusunun eğimi $m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, L_2 doğrusunun eğimi $m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_4 - x_3}$ tür. $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$ olduğundan $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_4 - x_3}$ ve buradan $m_1 = m_2$ elde edilir.

8–20. Örnek

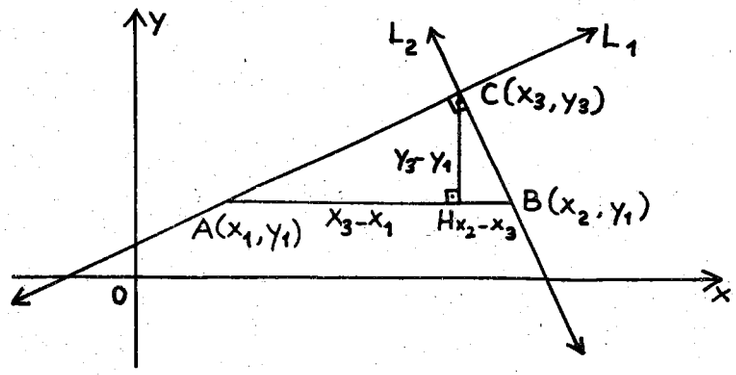
A(2,3) noktasından geçen $y = -2x + 1$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini yazalım.

Çözüm : Verilen doğrunun eğimi -2 dir. İstenen doğru verilen doğruya paralel olacağından onun eğimi de -2 olacaktır.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ formülünde $m = -2$, $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, $y = -2x + 7$ elde edilir.

8–4. Teorem

Eksenlere paralel olmayan iki doğru dik ise bunların eğimleri çarpımı -1 dir.



(8–20. Şekil)

Hipotez : $L_1 \perp L_2$

Hüküm : $m_1 m_2 = -1$(m_1, L_1 in, m_2, L_2 nin eğimidir.)

İspat : L_1 ve L_2 doğruları üzerinde ordinatları eşit olan A, B noktaları alınmıştır. $C(x_3, y_3)$ noktası da L_1 ile L_2 nin kesim noktasıdır. O halde,

$$m_1 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1},\ m_2 = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_2} \text{ dir.}$$

$\widehat{CAB}$ dik üçgeninde $|CH|^2 = |AH| . |HB|$ olduğundan

$(y_3 - y_1)^2 = (x_3 - x_1).(x_2 - x_3) = -(x_3 - x_1).(x_3 - x_2)$ elde edilir.

$$m_1\ m_2 = \frac{(y_3 - y_1)^2}{(x_3 - x_1).(x_3 - x_2)} = \frac{-(x_3 - x_1).(x_3 - x_2)}{(x_3 - x_1).(x_3 - x_2} = -1 \text{ olur.}$$

8–21. Örnek

Aşağıdaki doğru çiftlerinin birbirine dik ya da paralel olup, olmadıklarını araştıralım.

a) $y = 3x - 5$, $6x - 2y + 1 = 0$

b) $y = -\frac{1}{2}x + 7$, $y = 2x - 1$

Çözüm : a) $y = 3x - 5$ doğrusunun eğimi $m_1 = 3$, $6x - 2y + 1 = 0$ doğrusunun eğimi $m_2 = 3$ olduğundan bu iki doğru birbirine paraleldir.

b) $y = -\frac{1}{2}x + 7$nin eğimi $m_1 = -\frac{1}{2}$, $y = 2x - 1$ in eğimi 2 olduğundan $m_1 . m_2 = -\frac{1}{2} . 2 = -1$ olur. O halde bu doğrular birbirine diktir.

8–22. Örnek

A(—2,4) noktasından geçen 2y—x+1=0 doğrusuna dik olan doğrunun denklemini yazalım.

Çözüm : Verilen doğrunun eğimi $\frac{1}{2}$ olduğundan istenen doğrunun eğimi —2 dir. Eğimi ve bir noktası verilen doğrunun denklemini veren formülden yararlanarak y—4=—2(x+2) ve buradan y=—2x elde edilir.

8–3. Alıştırmalar

1) Aşağıdaki nokta çiftlerinden geçen doğruların eğimlerini bulunuz.

a) (2,1), (3,—1) b) (—4,0), (4,2)

c) (—4,0), $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ d) (3,—1), $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

2) Aşağıdaki nokta çiftlerinden geçen doğruların denklemlerini yazınız.

a) (2,8), (—2,3) b) $\left(4, \frac{1}{2}\right)$, (1,—4)

c) $\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$, (2,—1) d) (0,2), $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

3) Aşağıdaki eğimleri ve birer noktaları verilen doğruların denklemlerini yazınız.

a) m=3, (—2,3) b) m=$\frac{1}{2}$, (1,—4)

c) m=—2, (0,3) d) m=$\sqrt{3}$, $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

4) Köşelerinin koordinatları A(—1,4), B(3,0), C(—3,—2) olan $\widehat{ABC}$ üçgeni veriliyor.

a) Kenarlarının denklemlerini yazınız.
b) Kenarortaylarının denklemini yazınız.
c) Kenarlarının uzunluklarını bulunuz.
d) Kenarortaylarının uzunluklarını bulunuz.
e) Yüksekliklerinin denklemlerini bulunuz.

5) Aşağıda verilen noktalardan geçen ve verilen doğrulara paralel olan doğruların denklemlerini yazınız.

a) (2,1), y=3x—1

b) $\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$, 2x—y—3=0

c) (0,—2), x+y—2=0

6) Aşağıda verilen noktalardan geçen ve verilen doğrulara dik olan doğruların denklemlerini yazınız.

a) (3,—2), y=—x+1

b) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, 3x—y—2=0

c) (4,0), 2x—y=0

7) Aşağıdaki doğruların grafiklerini çiziniz.

a) y=x—3 b) x—2y—6=0
c) x+y—1=0 d) x=3
e) y=—2 f) 2x—3+6=0

8) A(3,—1), B(1,3) noktaları veriliyor. [AB] doğru parçasının orta dikmesinin denklemini yazınız.

9) Aşağıdaki nokta kümelerini koordinat sisteminde gösteriniz.

a) {(x,y)|y=2x ve —1<x<3}
b) {(x,y)|y=x—1 ve 0≤y≤2}
c) {(x,y)|x=y+2=0 ve 1≤x<3}
d) {(x,y)|y=2 ve 1≤x<4}
e) {(x,y)|x=1 ve —3≤y<0}

8–4. Lineer Denklemler

7. bölümde denklemin ne olduğunu ve bir denklemin çözümünden ne anlaşıldığını biliyorsunuz.

8–2. Tanım

ax+b=0 (a≠0) biçimindeki bir denkleme bir bilinmiyenli bir lineer denklem, ax+by=c (a≠0, b≠0) biçimindeki bir denkleme iki bilinmiyenli bir lineer denkem ve

$$a_1x+b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2$$

biçimindeki iki denklemede iki bilinmiyenli bir lineer denkem sistemi denir.

Denklem çözümlerine bazı örnekler üzerinde başlıyalım.

8-23. Örnek

$3x+y=8$ Lineer denklemini çözelim.

Çözüm : (2,2), (1,5), (3,—1), ... ikilileri bu denklemi sağlamaktadır. x e verilen her değer için y ye bir değer bulunmaktadır. O halde bu denklemin çözüm kümesi sonlu değildir.

8-24. Örnek

$2x+y=1$

$x-2y=8$ lineer denklem sistemini çözelim.

Çözüm : Birinci denklemin her iki yanını 2 ile çarpar ve iki eşitliği taraf tarafa toplarsak,

$$\left.\begin{matrix}2x+y=1\\ x-2y=8\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix}4x+2y=2\\ x-2y=8\end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad 5x=10 \Rightarrow x=2$$

elde edilir. $x=2$ değeri denklemlerden birinde yerine yazılırsa $y=-3$ olur. O halde denklem sistemimizin çözüm kümesi $(2,-3)$ dir.

İki bilinmiyenli denklem sistemlerinin çözümü için üç çeşit yöntem vereceğiz.

I. Karşılaştırma Yöntemi :

$$a_1x-b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2$$

sisteminin karşılaştırma yöntemi ile nasıl çözüleceğini açıklayalım. iki denklemden ayrı ayrı, bilinmiyenlerden biri, örneğin y hesaplanır.

$a_1x+b_1y=c_1 \Rightarrow \quad y=\dfrac{-a_1x+c}{b_1}$

$a_2x+b_2y=c_2 \Rightarrow \quad y=\dfrac{-a_2x+c_2}{b_2}$ dir. Buradan da,

$\dfrac{-a_1x+c_1}{b_1}=\dfrac{-a_2x+c_2}{b_2}$ elde edilir. Bu denklem birinci derecedendir. Yedinci bölümde öğrendiğimiz yöntemle bu denklemden x bulunur. Bulunan x değeri de yerine konularak y bulunur.

8-25. Örnek

$4x+y=2$

$-3x+2y=-7$

iki bilinmiyenli denklem sistemini karşılaştırma yöntemi ile çözelim.

Çözüm : Birinci denklemlerden $y=-4x+2$, ikinci denklemden $y=\dfrac{3x-7}{2}$ elde edilir. Bunlar birbirine eşit yazılırsa,

$$\frac{3x-7}{2}=-4x+2 \Rightarrow 3x-7=-8x+4 \Rightarrow 11x=11 \Rightarrow x=1$$

bulunur. $x=1$ değeri $y=-4x+2$ de yerine yazılırsa $y=-2$ olur.

II. Yoketme Yöntemi :

$$a_1x+b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2$$

sisteminin yoketme yöntemi ile nasıl çözüleceğini açıklayalım. Birinci denklemin her iki yanını b_2, ikinci denklemin her iki yanını da b_1 ile çarpalım.

$$a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2$$
$$a_2b_1x+b_1b_2y=c_2b_1$$

elde ederiz. Bu iki denklem birbirinden çıkarılırsa,

$$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1$$

elde edilir. $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ olmak üzere $x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}$ olur. Bu x değeri denklemlerden birisinde yerine konularak y bulunur.

Eğer $a_1b_2-a_2b_1=0$ ve $c_1b_2-c_2b_1=0$ ise çözüm kümesi sonlu değildir. $a_1b_2-a_2b_1=0$ ve $c_1b_2-c_1b_1\neq 0$ ise çözüm kümesi $\emptyset$ dir.

8-26. Örnek

$2x+3y=7$

$5x-2y=8$

iki bilinmiyenli denklem sistemini yoketme yöntemi ile çözelim.

Çözüm : Birinci denklemin iki yanını 2 ile, ikinci denklemin iki yanını 3 ile çarpalım, ve taraf tarafa toplayalım.

$$\begin{array}{r} 4x+6y=14\\ +\ 15x-6y=24\\ \hline 19x=38\\ x=2\end{array}$$

elde ederiz. $x=2$ birinci denklemde yerinekonulursa $4+3y=7 \Rightarrow 3y=3$ $y=1$ bulunur.

III. Yerine Koyma Yöntemi

$a_1x+b_1y=c_1$

$a_2x+b_2y=c_2$

sisteminin yerine koyma yöntemi ile nasıl çözüleceğini açıklayalım. Birinci denklemden bilinmiyenlerden biri örneğin, $y=\frac{-a_1x+c_1}{b_1}$ olarak bulunur. Bu değer ikinci denklemde yerine konur. Elde edilen denklem bir bilinmiyenli ve birinci dereceden bir denklem olacağından çözülebilir. Bulunan x değeri yerine yazılarak y de elde edilir.

8–27. Örnek

$-x+y=4$

$5x-2y=-7$

iki bilinmiyenli denklem sistemini yerine koyma yöntemi ile çözelim.

Çözüm : Birinci denklemden $y=2x+4$ elde edilir. Bu sonuç ikinci denklemde yerine yazılırsa, $5x-2(2x+4)=-7$ ve buradan $x=1$ olur. $x=1$ değeri $y=2x+4$ te yerine yazılırsa, $y=6$ olur.

8–4. Alıştırmalar

1) Aşağıdaki denklem sistemlerini çözünüz.

a) $2x-y=1$
$x+y=2$

b) $x+y=1$
$3x+3y=2$

c) $3x+y=1$
$x-y=3$

d) $2x+y=4$
$4x+2y=8$

2) Aşağıdaki denklem sistemlerini çözünüz.

a) $3(x-y)+2(2x+y)=5$
$2(x+y)-3(2x-y)=6$

b) $(x+1)(y-2)=xy-11$
$(x-2)(y+2)=xy+6$

c) $-2(x+y)+3(x-y)=3$
$2(x-y)+3(x+y)=-4$

3) Aşağıdaki denklem sistemlerini çözünüz.

a) $\frac{x+y}{3}-\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}$

$\frac{x+2y}{4}+\frac{x+y}{3}=2$

b) $\frac{x-y}{4}+\frac{x+y}{2}=1$

$\frac{2x}{3}+\frac{y-1}{6}=4$

c) $\frac{x+1}{2}-\frac{y}{3}=1$

$\frac{x+y}{4}+2y=12$

8–5. Grafikle Çözüm

Birinci dereceden iki bilinmiyenli bir denklemin koordinat sistemindeki grafiğinin bir doğru olduğunu biliyorsunuz. İki doğrunun grafiklerinin kesim noktasının koordinatları, doğruların denklemlerinin her ikisini de sağlayacaktır. O halde kesim noktasının apsis ve ordinatı denklem sisteminin çözümüdür. Bunu aşağıdaki örnekler üzerinde açıklayarak pekiştirelim.

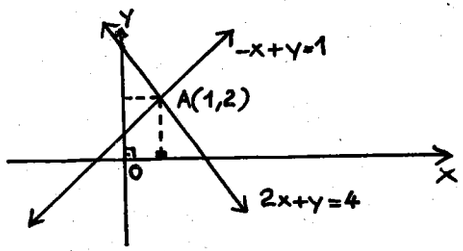
8–28. Örnek

$2x+y=4$

$-x+y=1$

sistemini grafikle çözelim.

Çözüm : $2x+y=4$ ve $-x+y=1$ doğrularının grafiklerini aynı koordinat sisteminde çizelim. (8–21. Şekil)



(8–21. Şekil)

Bu iki doğrunun grafikleri bir A noktasında kesişsinler. A nın koordinatları denklem sistemimizin çözümüdür. Buradan $x=1$, $y=2$ olur. Bu sonuçları 8–2. kesimde öğrendiğimiz çözüm yöntemlerinden biri yardımıyla bulabilirsiniz.

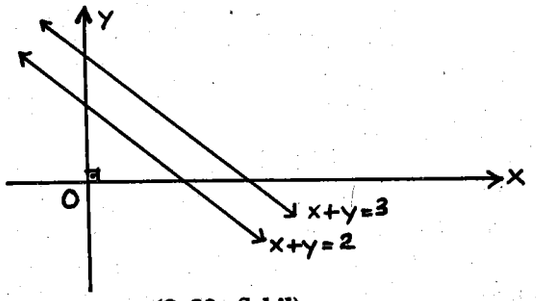
8–29. Örnek

$x+y=2$

$x+y=3$

sistemini grafikle çözelim.

Çözüm : $x+y=2$ ve $x+y=3$ doğrularının grafiklerini çizersek bunların paralel oldukları açıktır. (8–22. Şekil)



(8–22. Şekil)

O halde verilen denklem sisteminin çözümü yoktur. Yani çözüm kümesi Ø dir. Bu gerçek denklemlerden de görülmektedir. Çünkü $x+y$ nin hem 2 ye hem de 3 eşit olamayacağı açıktır.

Genel olarak, $a_1x+b_1y=c_1$ ve $a_2x+b_2y=c_2$ denklem sisteminde $a_1b_2-a_2b_1=0$ ve $c_1b_2-c_2b_1\neq 0$ ise çözüm kümesinin Ø olacağını söylemiştik. Buradan bu denklem sisteminde $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ ise çözüm kümesinin Ø olacağı bulunur. Bunun gibi $a_1b_2-b_1a_2=0$ ve $c_1b_2-c_2b_1=0$ ise çözüm kümesinin sonlu olmadığını da söylemiştik. Buradan da, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ ise çözüm kümesinin sonlu olmadığı bulunur.

8–30. Örnek

$x+2y=4$

$2x+4y=8$

sistemini grafikle çözelim.

Çözüm : $x+2y=4$ denkleminin iki yanını 2 ile çarparsak $2x+4y=8$ elde edilirki bu ikinci denklemdir. O halde grafik bir tek doğrudan oluşacaktır. Bu doğru üzerindeki her nokta her iki denklemi de sağlayacağından çözüm kümesi sonlu olmayacaktır. (2,1), (0,2), (—2,3),... noktaları her iki denklemi de sağlamaktadır.

8–5. Alıştırmalar

1) Aşağıdaki denklem sistemlerinin belirttiği ikişer doğruyu çiziniz. Varsa iki doğrunun kesişme noktasının koordinatlarından denklem sisteminin çözüm kümesini söyleyiniz.

a) $3x-y=1$, $x+y=3$

b) $y=x$, $x+y=2$

c) $x-y=1$, $2x-2y-2=0$

d) $x-y=4$, $2x+y=2$

2) $x+y=2$ doğrusu ile $3x+by=1$ doğrusunun grafiklerinin kesişmemeleri yani sistemin çözüm kümesinin Ø olması için b ne olmalıdır?

3) $x-y=3$ ve $ax-2y=3a$ doğrularının çakışık olması için a ne olmalıdır?

4) A(2,—3), B(—2,1) noktaları veriliyor.

a) A nın B ye göre simetriği olan C nin

b) B nin A ya göre simetriği olan D nin koordinatlarını bulunuz.

5) Aşağıdaki noktaların doğrusal olup olmadıklarını araştırınız.

a) (1,—1), (—2,2), (—4,4)

b) (2,1), (—2,1), (4,2)

c) $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $\left(\frac{3}{4},1\right)$, (2,2)

d) $\left(\frac{1}{2},0\right)$, (1,2), (2,5)

6) A(3,1), B(—1,3), C(1,1) noktaları veriliyor. [AB] ve [AC] nin orta noktalarını birleştiren doğru parçasının [BC] ye paralel olduğunu ve uzunluğunun [BC] nin uzunluğunun yarısı olduğunu gösteriniz.

7) A(0,2), B(—2,2), C(4,—4) noktaları verilir. $\widehat{ABC}$ üçgeninin kenarortaylarının aynı noktada kesiştikleri ni gösteriniz.

8) A(—3,1), B(2,4), C(1,—1) noktaları veriliyor. ABCD paralel kenarının D köşesinin koordinatlarını bulunuz.

9) Köşeleri A(—2,3) B(4,3), C(3,5), D(0,5) olan ABCD yamuğu veriliyor. Paralel olmayan kenarların orta noktaları E, F ise

$$|EF|=\frac{|AB|+|CD|}{2}$$ olduğunu bulunuz.

SEKİZİNCİ BÖLÜMLE İLGİLİ TESTLER

1) Aşağıda denklemleri verilen doğru çiftlerinden hangileri paraleldir?

A) $x-2y+1=0$, $x+2y-3=0$

B) $x+y-3=0$, $x-y+1=0$

C) $x+2y+1=0$, $2x+4y-1=0$

D) $x+2y-1=0$, $2x-y+1=0$

E) $y=2x$, $y=2x+1$

2) Aşağıdaki doğru çiftlerinden hangileri birbirine diktirler?

A) $x-y=3$, $2x2y=1$

B) $x+2y-1=0$, $2x-y-3=0$

C) $y=2x$, $y=\frac{1}{2}x+1$

D) $x+y-4=0$, $2x+2y-1=0$

E) $y=-3x$, $y=3x-2$

3) A(2,—1) noktasının 0(0,0) noktasına göre simetriği olan B noktasının koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) (—1,—2), B) (2,1), C) (—2,1), D) (—2,1) E) (—1,2).

4) A(—1,4), B(3,2) noktaları veriliyor. Aşağıdakilerden hangileri |AB| ye eşittir?

A) $\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{5}$ C) $\sqrt{2}$ D) $5\sqrt{2}$ E) 4

5) A(—1,—5), B(—3,1) olduğuna göre, [AB] nin orta noktası aşağıdakilerden hangisidir?

A) (2,2), B) (—2,2), C) (—2,2) D) (2,—2), E) (—4,—4)

6) A(1,1) noktasından geçen ve $y=2x+1$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemi aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y=2x-1$ B) $y=-1x+1$ C) $y=2x2$ D) $y=\frac{1}{2}x-1$

E) $y=-\frac{1}{2}x+1$

7) A(—1,4), B(3,1), C)(—3,2) veriliyor. ABCD paralelkenarlarının D köşesinin koordinatları aşağıdakilerden hangisidir?

A) (—7,5) B) (—6,5) C) (—5,4) D) (5,—4) E) (7,—5)

8) A(1,0) noktasından geçen ve $y=-2x+3$ doğrusuna dik olan doğrunun denklemi hangisidir?

A) $y=-\frac{1}{2}x+1$ B) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ C) $y=\frac{1}{2}x+1$

$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ E) $x-2y+1=0$

9) $3x+y-2=0$ doğrusunun $ax+by-4=0$ doğrusu ile çakışması için (a, b) nin değeri ne olmalıdır?

A) (—4,—2) B) (6,2) C) (—4,2) D) 4,—2) E) (3,1)

10) $x+2y=1$, $2x+4y=3$ iki bilinmiyenli denklem sisteminin çözüm kümesi aşağıdakilerden hangisidir?

A) (1,0) B) (—1,1) C) —1,0) D) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ E) Ø

SÖZLÜK

A

A ile B nin kartezyen çarpımı : Birinci bileşeni A dan, ikinci bileşeni B den seçilerek oluşturulan ikililerin kümesi.

A kümesinden B nin farkı : A kümesinin B kümesi ile ortak olmayan elemanlarından oluşan küme.

A kümesinden B ye fonksiyon : A nın elemanlarının her birini B nin elemanlarına bir ve yalnız bir kez eşleyen bağıntı.

Açık önerme : İçerisindeki değişkenin aldığı değerlerle doğru veya yanlış olan önerme.

A kümesinin bir * işlemine göre kapalı olması : $\forall (x,y) \in A \times A$ için $x * y \in A$ olması.

Aksiyom : Doğru olduğu ispatsız kabul edilen önerme.

Alt küme : Bir A kümesinin tüm elemanları bir B kümesinin de elemanları ise A ya B nin bir alt kümesi denir.

Analitik düzlem : Üzerine koordinat sistemi yerleştirilmiş düzlem.

Arada olma : Aynı doğru üzerindeki farklı üç noktadan birinin diğer ikisi arasında olması.

Aralarında asal : $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının her ikisini de bölen bir polinomun olmaması hali.

B

Bağıntı : Bir kartezyen çarpımın alt kümesi.

Birebir (1-1) fonksiyon : Tanım kümesinin her farklı iki elemanını değer kümesinin farklı elemanlarına eşleyen fonksiyon.

Birim fonksiyon : Tanım kümesinin her bir elemanını yine kendisine eşleyen fonksiyon.

Birleşme özeliği : A üzerinde bir * işlemi verildiğinde $\forall\ x, y, z \in A$ için, $x * (y * z) = (x * y) * z$ olması.

Bir önermenin değili : Bir önermenin olumsuzunu bildiren tümce.

Bileşik önerme : En az iki önermeden önerme işlemleri ile elde edilen önerme

Boş küme : Hiç elemanı olmayan küme.

Bütünleme aksiyomu : Doğrusal çift oluşturan iki açı ile ilgili aksiyom.

C

Cisim : Bir küme ve bu küme üzerinde tanımlanmış iki işlemin belli (ve halkadan fazla) koşulları taşıması.

Cetvel aksiyomu : Bir doğrunun noktaları ile reel sayılar arasındaki eşleme ile ilgili aksiyom.

Ç

Çarpanlara ayırma : Bir polinomu, en az iki polinomun çarpımı biçiminde gösterme.

Çelişki : Doğruluk değeri daima "0" olan bileşik önerme.

Çift gerektirme : Totoloji olan iki yönlü koşullu önerme.

D

Denklik bağıntısı : Yansıma, simetri ve geçişme özelikleri olan bağıntı.

Değişme özeliği : A üzerinde bir $*$ işlemi verildiğinde $\forall\ x, y \in A$ için, $x * y = y * x$ olması.

Denklemi çözmek : Denklemin köklerini bulma işlemi.

Denklemin çözüm (doğruluk) kümesi : Bir denklemin köklerinin oluşturduğu küme.

Dikdörtgen : Tüm açıları dik olan paralelkenar.

Dörtgen : Dört kenarlı çokgen.

Doğal sayı : Sonlu kümelerin bire-bir eşleme bağıntısına göre denklik sınıflarının herbiri.

Doğal sayılar kümesi : $N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ kümesidir.

E

e birim elemanı : A üzerinde bir $*$ işlemi verildiğinde $\forall\ x \in A$ olmak üzere bir $e \in A$ için $x * e = e * x = x$ olmasıdır.

Eşkenar üçgen : Üç kenarı birbirine eş olan üçgen.

Evrensel küme : Üzerinde çalışılan konuyla ilgili olan tüm elemanları içeren küme.

Evrensel niceleyici : $\forall$ simgesi ile gösterilir ve "her" veya "tüm" diye okunur.

F

f fonksiyonunun tanım kümesi : A dan B ye f fonksiyonu verildiğinde A kümesi.

f fonksiyonunun değer kümesi : A dan B ye f fonksiyonu verildiğinde B kümesi.

f fonksiyonunun görüntü kümesi : A dan B ye f fonksiyonu verildiğinde A nın elemanları ile eşleşmiş olan B nin elemanlarının kümesi.

G

"g bileşke f" fonksiyonu: $f : A \to B$ ve $g : B \to C$ birer fonksiyon olmak üzere A dan C ye $(gof)(x) = g(f(x))$ kuralı ile belirlenen fonksiyon.

Grup : Bir küme ve bunun üzerinde tanımlanan bir işlemden oluşan sistemin, kapalılık, birleşme, birim elemanın varlığı ve her elemanın tersinin varlığı koşullarını gerçeklemesi.

Gerektirme : Totoloji olan koşullu önerme.

H

Halka : Bir küme ve bu küme üzerinde tanımlanmış iki işlemin belli bazı koşulları taşıması.

Hipotez : $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinde p önermesi.

Hüküm : $p \Rightarrow q$ koşullu önermesinde q önermesi

İ

İki kümenin birleşimi : İki kümenin elemanlarından oluşan küme.

İki kümenin kesişimi : İki kümenin ortak olan elemanlarından oluşan küme.

İki yönlü koşullu önerme: $p \Leftrightarrow q$ biçimindeki bileşik önerme.

İspat : Bir teoremin hükmünün doğru olduğunun gösterilmesi.

İşlem : AxA nın bir alt kümesinden A ya fonksiyon.

İrrasyonel sayılar : Rasyonel olmayan (devirli ondalık açılımları olmayan) sayılar.

İkizkenar üçgen : İki kenarı eş olan üçgen .

İkizkenar yamuk : Paralel olmayan kenarları eş olan yamuk.

Δ işleminin O işlemi üzerine dağılma özeliği : A üzerinde O ve Δ işlemleri verildiğinde $x, y, z \in A$ için, $x\Delta(yOz) = (x\Delta y)O(x\Delta z)$ olması.

İkinci bileşen : Bir (x, y) ikilisinde y elemanı.

K

Konveks küme : Bir nokta kümesinin herhangi iki elemanını birleştiren doğru parçasının bu kümenin alt kümesi olması.

Koşullu önerme : $p \Rightarrow q$ biçimindeki bileşik önerme.

N

Negatif tam sayı : $n \in N$ ve $n \neq 0$ için (0, n) biçimindeki tam sayı. Negatif tam sayıların kümesi Z^- ile gösterilir.

Noktanın koordinatı : Reel sayı ekseninde noktaya karşılık gelen reel sayı. Analitik düzlemde ise noktaya karşılık gelen reel sayı ikilisi.

M

Matematik sistem : Bir küme ve bu küme üzerinde tanımlanmış bir veya daha çok işlemden oluşan sistem.

Modüler aritmetik : Saat aritmetiği. (Tam sayıların belli bir $m \in N$ ve $m \geq 2$ doğal sayısı bölümünden elde edilen kalan sınıfları ile yapılan aritmetik

Mutlak değer : $x \in R$ için, $x \geq 0$ ise $|x| = x$ ve $x < 0$ ise $|x| = -x$ dir.

O

Olmayana ergi yöntemi : Bir teoremde hükmün değilini doğru varsayıp hipotezin değilini elde ederek yapılan ispat.

Orta dikme : Bir doğru parçasına orta noktasında dik olan doğru.

Ö

Önerme : Doğru ya da yanlış olan tümce.

Örten fonksiyon : Değer kümesinin tüm elemanlarının, tanım kümesinin en az bir elemanı ile eşlendiği fonksiyon.

Öz alt küme : Bir kümenin kendisine eşit olmayan alt kümesi.

P

Paralel doğrular : Düzlemsel olup kesişmeyen doğrular.

Paralelkenar : Karşılıklı kenarları parelel olan dörtgen.

Paralellik aksiyomu : Bir doğruya dışındaki bir noktadan en çok bir paralel doğru çizilebileceğini belirten aksiyom.

Permütasyon : A dan A ya 1-1 ve örten fonksiyon.

Polinom denklem : Sıfırdan farklı bir $P(x)$ polinomu $P(x) = 0$ koşulu.

Polinom denklemi kökü : $P(x) = 0$ polinom denklemini sağlayan (varsa) x sayısı.

Polinomlarda EBOB : Sıfırdan farklı herhangi iki $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının her ikisini de kalansız bölebilen en büyük dereceli polinom.

Polinomlarda EKOK : Sıfırdan farklı herhangi iki $P(x)$ ve $Q(x)$ polinomlarının her ikisine de kalansız bölünebilen en küçük dereceli polinom.

Polinomlar halkası : Reel sayılar kümesine, hiçbir koşula bağlı olmayan tanımsız ve belirsiz x elemanı katarak bulunan en dar halka. $R[x]$ ile gösterilir.

Pozitif tam sayı : $m \in N$ ve $m \neq 0$ için $(m, 0)$ biçimindeki tam sayı. Pozitif tam sayıların kümesi Z^+ veya N^+ ile gösterilir.

R

Rasyonel ifade : $P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom olmak üzere $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ifadesi. $Q(x) \neq 0$

Rasyonel sayı : Tam sayılarla belirlenmiş $K = \{(x : y) \mid x, y \in Z, y \neq 0\}$ kümesinde tanımlanmış belli bir denklik bağıntısının denklik sınıfı. Rasyonel sayılar kümesi Q ile gösterilir.

S

Sabit fonksiyon : Tanım kümesinin tüm elemanlarını değer kümesinin aynı elemanı ile eşleyen fonksiyon.

Sonlu küme : Hiç bir öz alt kümesi ile 1-1 eşlenemeyen küme.

Sonsuz küme : En az bir öz alt kümesi ile 1-1 eşlenebilen küme.

Sıralama bağıntısı : Yansıma, test-simetri ve geçişme özelikleri olan bağıntı.

T

Tam sayılar : m, n sıfırdan farklı doğal sayılar olmak üzere $(0, 0)$, $(m, 0)$, $(0, n)$ biçiminde temsil edilebilen bütün denklik sınıfları. Tam sayılar kümesi, $Z = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ ile gösterilir.

Tek kuvvet özeliği : A üzerinde bir $*$ işlemi verildiğinde $\forall x\, y \in A$ için, $x * x = x$ olmasıdır.

Teorem : $p \equiv 1$ olmak üzere $p \Rightarrow q$ gerektirmesi.

Terim : Bir bilim dalı içinde özel anlamı olan sözcük.

Totoloji : Doğruluk değeri daima 1 olan bileşik önerme.

Ters fonksiyon : f, 1-1 ve örten fonksiyon olmak üzere $\forall (x, y) \in f$ için $(y, x) \in f^{-1}$ olan f^{-1} fonksiyonu.

Ü

Üçgen eşitsizliği : Bir üçgenin herhangi iki kenarının uzunlukları toplamının üçüncü kenarın uzunluğundan büyük olması.
$x, y \in R$ için, $|x+y| \leq |x| + |y|$ olması.

V

Varlıksal niceleyici : $\exists$ simgesi ile gösterilir. ve "en az bir" veya "bazı" diye okunur.

Venn şeması : Kümenin elemanlarının bir kapalı eğri içine yazılarak gösterilmesi

Y

Yamuk : Karşılıklı iki kenarı paralel ve diğer iki kenarı paralel olmayan dörtgen.